【命题研究】

一题两空题的结构特点与命题途径

黄翠云

【摘　要】“一题两空”题的两空得分模式有利于提高低水平考生的得分,有利于区分出高水平的考生,同时能够更加精确地发挥数学学科考试的区分选拔功能.文章从“一题两空”题的结构、特点及命题实践等三个方面阐述研究者的思考和认识.

【关键词】一题两空;结构特点;命题途径

“一题两空”题是填空题的一种,是近年出现在高考或各地模拟试题中的一种新题型,相对于单空题,“一题两空”题的两空得分模式有利于提高低水平考生的得分,有利于区分出高水平的考生,同时能够更加精确地发挥数学科考试的区分选拔功能,因而深受广大师生的关注和欢迎.因此,重视对“一题两空”题这一题型的研究很有必要.

一、“一题两空”题的结构

“一题两空”题是将4个填空题中的一个,由原来的一个空改为了两个空,一般安排在填空题的压轴或次压轴题的位置.“一题两空”题的分值仍为5分,两个空一个2分一个3分,题后括号内的注释语为“第一空2分,第二空3分.”

二、“一题两空”题的特点

“一题两空”题设置的两个空,一般前一个空较简单,后一个空要难于前一个空,无论是哪一个空答对都能得到相应的分数,不像单空题那样答错即失去全部分数,因而“一题两空”题相对于单空题有更高的得分率,增进考生对数学学习的获得感,也更精准地测试和区分了不同层次考生的数学能力水平,增强考试的信度和效度.

三、“一题两空”题的命题途径

近期笔者多次参与了数学原创卷的命题和审题工作,在命题实践中认识到“一题两空”题主要有下面几种命题途径.

(一)一题多答命题

这一类型的“一题两空”题就是设置同一个问题的不同结果分别填在两个空中,其本质是将单空题的一个空拆分为两个空,但相比单空题将结果填在一个空中,增加了考生的得分机会.这在多空题的命题中极少出现的一种类型.

例1　已知抛物线 $E:y^2=8x$ 的焦点为 F,过 F 的直线 l 与 E 交于 A,B 两点,若 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{FB}$,则 l 的方程为______或______.(每条横线上只写一个可能结果)

解析　依题意可知 $F(2,0)$,l 的斜率 k 存在.

设 l 的方程为 $y=k(x-2)$,分别过 A,B 两点作抛物线准线 l' 的垂线,垂足为 M,N.

设 $|FB|=t$,则 $|FA|=2t$,$|AB|=3t$.

由抛物线的定义得 $|AM|=|FA|=2t$,$|BN|=|FB|=t$.

在直角梯形 $AMNB$ 中,$\cos\angle MAB=\dfrac{|AM|-|BN|}{|AB|}=\dfrac{2t-t}{3t}=\dfrac{1}{3}$,从而 $\tan\angle MAB=2\sqrt{2}$,即为 l 的斜率.而由对称性可知,$-2\sqrt{2}$ 也是 l 的斜率,故 l 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-2)$ 和 $y=-2\sqrt{2}(x-2)$,故填 $2\sqrt{2}x-y-4\sqrt{2}=0$;$2\sqrt{2}x+y-4\sqrt{2}=0$.

点评　本题填写的其实是一个题的两个不同结果,如果是单空题,漏写一个结果就不能得分,而作为“一题两空”题,一是暗示了题目的结论有两个结果,二是即使只想到一个结果,填对的话也能至少得2分.

(二)并列分答命题

这一类型的“一题两空”题就是在同样题设条

件下,设置有同样解题思路和过程,解答不同结论要求的问题,两空分答,将解答结果分别填在两个空中.这在"一题两空"题的命题中较少出现的一种类型.

例2 某校体育节10名旗手的身高分别为:175.0,178.0,176.0,180.0,179.0,175.0,176.0,178.0,180.0,179.0,则这组数据的中位数为______;第80百分位数为______.

解析 把10个样本数据按从小到大排序,可得175.0,175.0,176.0,176.0,178.0,178.0,179.0,179.0,180.0,180.0,所以中位数为$\frac{178.0+178.0}{2}=178.0$.

由$80\%\times10=8$,可知样本数据的第80百分位数为$\frac{179.0+180.0}{2}=179.5$.

点评 该题在同一个统计背景下命制,考查样本数据的中位数和第80百分位数是并列的两个结论,作答后分别填空即可.

例3 平面四边形$ABCD$中,$AB\perp BC$,$AB=3$,$AD=BC=4$,$CD=\sqrt{41}$,将$\triangle DAC$沿AC折起到$\triangle PAC$的位置,使得平面$PAC\perp$平面ABC,则此时三棱锥$P-ABC$的体积为______;三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积为______.

解析 由$AB\perp BC$,$AB=3$,$BC=4$,解得$AC=5$.又$AD=4$,$CD=\sqrt{41}$,所以$AC^2+AD^2=CD^2$,即$AC\perp AD$.如图1,故折起后,$PA\perp AC$.

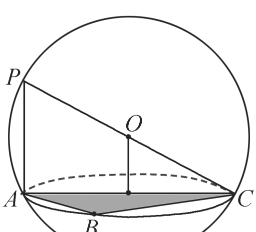

图1

又平面$PAC\perp$平面ABC,平面$PAC\cap$平面$ABC=AC$,所以$PA\perp$平面ABC,PC为外接球的直径.

所以三棱锥$P-ABC$的体积为$\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times4=8$.

外接球的表面积为$4\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2=41\pi$.

点评 本题是以四边形的折叠为背景命制并列结论的立体几何问题,旨在考查空间的直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系,也考查二面角的概念及运算,考查运算求解能力,空间想象能力和逻辑推理能力.

(三)拓展同答命题

这一类型的"一题两空"题就是设置同样题设背景,两个空是特殊与一般的关系,第二空是第一空的推广与拓展.解答时按第二空的一般情形进行作答,得到结论后取第二空中的特殊情况即得到第一空的答案.

例4 一块三棱锥形状的余料$P-ABC$,其三条侧棱PA,PB,PC两两垂直.现需将其切割成直三棱柱,使得直三棱柱的侧棱与原三棱锥的一条侧棱平行或重合.若$PA=4$,$PB=4$,$PC=4$,则切割得到的直三棱柱的最大体积为______;不失一般性,若$PA=a$,$PB=b$,$PC=c$,则切割得到的直三棱柱的最大体积为______.(结果用a,b,c表示,其中a,b,c为正实数,第一空2分,第二空3分)

解析 先考虑顶点位置,如图2,若直三棱柱$EJG-PKI$上底面的顶点J没有落在棱AB上,总可以将EJ延长交棱AB于点F,过点F作PA的平行线交PB于点H,得到新的三棱柱$EFG-PHI$,新三棱柱$EFG-PHI$的体积比原三棱柱$EJG-PKI$的体积大,其他上底面顶点同理.若要直三棱柱的体积最大,则上底面三个顶点均落在相应的棱上.

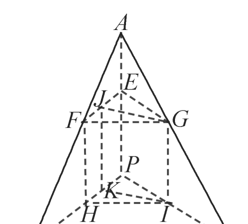

图2

因为底面$EFG\parallel$底面PBC,所以$\triangle EFG\backsim\triangle PBC$.

设$\frac{EF}{PB}=x$,则$\frac{EG}{PC}=x$,$\frac{EP}{PA}=1-x$,$0<x<1$.

于是$EF=bx$,$EG=cx$,$EP=a(1-x)$,故三棱柱$EFG-PHI$的体积为$V=\frac{1}{2}bx\cdot cx\cdot a(1-x)=\frac{abc}{2}(-x^3+x^2)$.

设$f(x)=-x^3+x^2$,$0<x<1$,则$f'(x)=-3x^2+$

$2x=x(2-3x)$.

由$f'(x)>0$,得$0<x<\frac{2}{3}$;由$f'(x)<0$,得$x<0$或$x>\frac{2}{3}$,故$f(x)$在$\left(0,\frac{2}{3}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{2}{3},1\right)$上单调递减,所以当$x=\frac{2}{3}$时,$f(x)$取得最大值,且最大值为$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}$.

从而体积最大值为$\frac{2abc}{27}$.

若$a=b=c=4$,则最大体积为$\frac{128}{27}$.

点评 本题将三棱锥切割成直三棱柱,通过这一变换,设出变量,构造函数模型,利用导数求得体积最大值.

(四)递进逐答命题

这一类型的"一题两空"题就是设置同样题设条件,有密切联系的两个空,第二空的解答需要借助第一个空的结果才能完成,第一空是基础和关键,这样第一空解答完成且结果正确的情况下,第二空才能顺势作答获取正确的结果.这是在"一题两空"题的命题中出现最多的一种类型.

例5 已知函数$f(x)=xe^x-ax^2$,若曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线与直线$2x-y-6=0$平行,则实数$a=$______;函数$g(x)=f(x)+ax^2$的极值点为______.(第一空2分,第二空3分)

解析 因为$f(x)=xe^x-ax^2$,所以$f'(x)=e^x+xe^x-2ax=(x+1)e^x-2ax$,所以$f'(-1)=2a$.

由题意,得$2a=2$,所以$a=1$.

$g(x)=xe^x$,则$g'(x)=(x+1)e^x$.

令$g'(x)<0$,得$x<-1$;令$g'(x)>0$,得$x>-1$.

故函数$g(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-1)$,单调递增区间为$(-1,+\infty)$.

又$g'(-1)=0$,所以函数$g(x)$的极小值点为$x=-1$,无极大值点.

故填:1,$x=-1$.

点评 本题递进型两空命制,考查导数的计算、极值点的概念及导数在研究函数单调性中的应用,考查导数几何意义的应用.该题若第一空做不出来或解答错误,就会影响到第二空的解答和结果的正确与否.

例6 已知函数$y=|x^2-2x-1|$的图象与直线$y=m(m\in\mathbf{R})$有四个交点,且这四个交点的横坐标分别为a,b,c,d且满足$a<b<c<d$,则$a+b+c+d=$______;$2(d-a)+(c-b)$的最大值为______.(第一空2分,第二空3分)

解析 在同一直角坐标系内作出函数$y=|x^2-2x-1|$与直线$y=m$的图象,如图3.

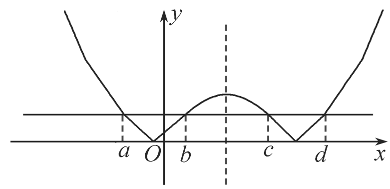

图3

由图象并结合函数$y=|x^2-2x-1|$,易知$\frac{a+d}{2}=\frac{b+c}{2}=1$,所以$a+d=b+c=2$,故$a+b+c+d=4$.

由题意,知a,d是方程$x^2-2x-1=m$的两根,b,c是方程$x^2-2x-1=-m$的两根,由一元二次方程的求根公式易得$d-a=2\sqrt{2+m}$,$c-b=2\sqrt{2-m}$,且$0<m<2$,所以$2(d-a)+(c-b)=2(2\sqrt{2+m}+\sqrt{2-m})$,$0<m<2$.

设$\varphi(m)=2(2\sqrt{2+m}+\sqrt{2-m})$,$0<m<2$.

由$\varphi'(m)=\frac{2\sqrt{2-m}-\sqrt{2+m}}{\sqrt{4-m^2}}=0$,解得$m=\frac{6}{5}$.

当$0<m<\frac{6}{5}$时,$\varphi'(m)>0$,当$\frac{6}{5}<m<2$时,$\varphi'(m)<0$,所以函数$\varphi(m)$在$\left(0,\frac{6}{5}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{6}{5},2\right)$上单调递减,所以当$m=\frac{6}{5}$时,$\varphi(m)$取得最大值,且最大值为$\varphi\left(\frac{6}{5}\right)=4\sqrt{5}$,故$2(d-a)+(c-b)$的最大值为$4\sqrt{5}$.

故填:4,$4\sqrt{5}$.

点评 本题以函数图象相交为背景命制的递进型试题,综合考查函数图象、函数与方程的关系,一元二次方程的求根公式、构造函数、求导、导数在研究函数单调性的应用等知识.

(五)异问各答命题

这一类型的"一题两空"题相当于设置同样题设条件的两道小填空题,两空之间没有什么直接联系,

互不干扰,各自成题,是对多个知识点或某个知识点的多个角度的考查,即使有一空答不出来,照样可以完成另一空的作答.

例7 如图4,已知线段AB的长度为10,AB上的两个定点C,D满足$AC=BD=1$.动点P从点C出发,以每秒1个单位长度的速度沿着AB向点D移动,到达点D后停止移动.在点P移动过程中作如下操作:先以点P为圆心,PA,PB的长为半径分别作两个圆心角均为60°的扇形,再将两个扇形分别围成两个圆锥的侧面.若动点P从点C出发移动3秒,左、右两个扇形的周长之比为______;若设点P的移动时间为t(秒),两个圆锥的底面面积之和为S,则S的最小值为______.(第一个空2分,第二个空3分)

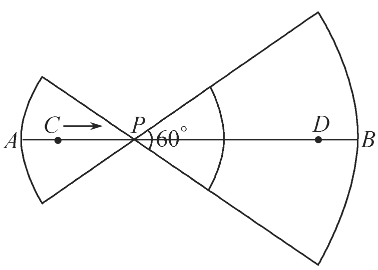

图4

解析 先解答第一空:当动点P从点C出发移动3秒,此时$PA=4,PB=6$.

所以左侧扇形的弧长为$\frac{\pi}{3}\times4=\frac{4\pi}{3}$,所以左侧扇形的周长为$4+4+\frac{4\pi}{3}=8+\frac{4\pi}{3}$.

右侧扇形的弧长为$\frac{\pi}{3}\times6=2\pi$,所以右侧扇形的周长为$6+6+2\pi=12+2\pi$.

所以左、右两个扇形的周长之比为$\frac{8+\frac{4\pi}{3}}{12+2\pi}=\frac{\frac{1}{3}(24+4\pi)}{12+2\pi}=\frac{2}{3}$.

再解答第二空:先用关于t的式子表示出两个扇形的半径,根据扇形的弧长等于底面圆的周长求出两个圆锥底面圆的半径,最后列出两个圆锥底面积之和关于t的二次函数关系式,求得最小值.

因为$AB=10,AC=BD=1$,所以$CD=10-1-1=8$.因为$PC=t(0\leqslant t\leqslant8)$,所以$PA=t+1,PB=8-t+1=9-t$.

设围成的左、右两个圆锥底面圆的半径分别为r,R,则$\begin{cases}2\pi r=\frac{\pi}{3}(t+1),\\2\pi R=\frac{\pi}{3}(9-t),\end{cases}$解得$r=\frac{t+1}{6},R=\frac{9-t}{6}$,所以$S=\pi\left(\frac{t+1}{6}\right)^2+\pi\left(\frac{9-t}{6}\right)^2=\frac{\pi}{36}(t^2+2t+1)+\frac{\pi}{36}(t^2-18t+81)=\frac{\pi}{18}(t^2-8t+41)$.所以当$t=4\in[0,8]$时,$S$有最小值,且最小值为$\frac{25\pi}{18}$.

点评 试题以点的移动为背景,考查扇形的周长、面积公式,圆锥的侧面展开图,圆锥的侧面积公式、二次函数的最值等知识的应用.两空的解答各自独立、互不影响.

四、结束语

1.数学多空题的引入,无疑对数学高考卷坚持基础性、综合性、应用性和创新性的考查要求,科学把握试题的区分度,全面体现数学科高考的选拔性功能等方面,都发挥积极、良好的导向作用.作为数学教师,无论是新高考地区还是非新高考地区、无论是起始年级还是毕业年级的,都应深入地研究这一新题型在指导数学教与学所潜在的结构、功能和类型特点,以发挥这一新题型更大的教学效益[1].

2.参与多空题的命题实践,既能提高数学教师的数学素养,促进专业发展,又能使教师很好地把握题型特点和规律,更能有的放矢地指导学生复习备考.因此,数学教师应多做一些命题实践工作,不断提高个人的数学素养、专业发展和命题水平[1].

参考文献:

[1]李寒.多选题的结构、特点及命题途径概谈[J].中学数学杂志,2021(3):56-59.

【作者简介】黄翠云(1980-),女,山东青岛人,山东省青岛市即墨区第二中学,中学一级教师,即墨区三八红旗手,主要研究中学数学教学(266200).

【原文出处】《中学数学杂志》(曲阜),2022.5.46~49