

【课改探索】

青岛中学开设大学数学先修课程的探索与实践

王昆扬 张英伯 王东刚

【摘要】文章介绍了开设大学数学先修课的政策依据以及青岛中学开设大学数学先修课的基本情况;进而简要介绍了《数学分析》等大学先修课程设置的基本情况以及在教学内容和教学方法上的尝试;最后对学生数学成绩进行了介绍,并对大学数学先修课的实施经验进行了总结。

【关键词】大学先修课;青岛中学;课程设置

一、开设大学数学先修课的政策依据

我国教育部1996年5月出版的《全日制普通高级中学数学教学大纲(供试验用)》规定:限定选修课安排在高三.其中供理科选用部分,每周4课时,共104课时,内容是:1.概率与统计(18课时),2.极限(14课时),3.导数与微分(20课时),4.积分(14课时),5.复数(18课时).而且,这些内容也将在高考的命题范围之内。

我国教育部2000年发布的《全日制普通高级中学数学教学大纲(试验修订版)》明确规定的“教学内容和教学目标”是:必修课1.集合、简易逻辑(14课时);2.函数(30课时);3.不等式(22课时);4.平面向量(12课时);5.三角函数(46课时);6.数列(12课时);7.直线和圆的方程(22课时);8.圆锥曲线方程(18课时);9.直线、平面、简单几何体(36课时);10.排列、组合、二项式定理(18课时);11.概率(12课时);12.研究性课题(12课时).必修课共254课时.选修Ⅰ1.统计(12课时);2.极限与导数(20课时);选修Ⅱ1.概率与统计(14课时);2.极限(12课时);3.导数与微分(16课时);4.积分(14课时);5.复数(16课时);6.研究性课题(选修Ⅱ6课时).选修Ⅱ共78课时.总课时为332.该大纲中提到的第一个应注意的问题就是在教学中“区别对待,因材施教,因势利导”。

这两个大纲表明,教育部早就注意到把大学数学的一些基础知识以“必修课”“限定选修课”“选修课”的形式纳入高中数学课程中。

教育部颁布的《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》明确规定:大学数学先修课为E类选修课,包括三个专题:微积分、解析几何与线性代数、概率论与数理统计,每个专题6学分。

《中国先修课程(CAP)体系方案(2013.5)》的“序言”中有这样一段话:

中国现有的高中和大学教育存在着明显的断层,这种断层不仅造成了人才和资源的浪费、人才培养链条的断裂等问题,还从一定程度上造成了各高校的生源拉锯战现状,进一步加剧了教育资源的不公平性.此外,中国的教育体系一直在朝向“人才强国”的目标而努力.但是,中国现行的教育体制一直注重强调建立完善的大众教育体系,但缺乏科学的精英教育体系.没有大众教育,民族没有希望;没有精英教育,民族和国家就强大不了,人才强国的目标就难以实现.一直以来,教育界十分强调教育的“公平性”,强调对学生不做区别化对待,让每一个学生都能获得“无差异化”的教育,但是这种错误解读只强调了教育公平中的覆盖性,却忽视了公平性的核心含义,人为地将教育公平和因材施教对立了起来.《中国大学先修课程体系》的目标就是要改变这些现状,我们希望能够借助这一综合性、跨平台、体系化的拔尖学生培养体系让学有余力的高中生能够及早接触大学课程内容,接受大学思维方式、学习方法的训练,让他们真正享受到最符合其能力和兴趣水平的教育,发展他们的学习和研究能力,提升他们的批判性思维水平,帮助他们为大学学习乃至未来的职

业生涯做好准备,帮助他们能够更好、更快地成才,从而缩短人才培养周期。

这里有两个值得我们注意的问题。

第一个问题,高中和大学教育存在着明显的断层。这是个不容忽视的客观事实。大学教师普遍体会到,不少学生从高中进入大学后在相当长时间内表现出知识基础薄弱和接受能力的不适应,甚至普遍表现出“高分低能”的现象。

第二个问题,“让学有余力的高中生能够及早接触大学课程内容,接受大学思维方式、学习方法的训练,……,缩短人才培养周期”。现代数学及整个现代科学,对于学生的素质要求不断提高。有能力的高中学生,应该尽早培养和训练把感性认识上升到理性认识的能力。

我们对这些问题进行了深入思考。结论是:有必要也有可能给学有余力的学生开设“大学先修课”(以下简称“大先课”),对于现行的中学数学教材内容进行严格的逻辑处理,把相关的高等数学知识,如微积分、线性代数、解析几何,这些号称“老三高”的知识,与中学的基础知识作有机的融合,贯通起来,保持数学科学固有的逻辑性、系统性、严格性。这门课将能够从本质上大大提高学有余力的学生的学习质量和学习效率。

二、青岛中学开设大学数学先修课的基本情况

青岛中学把大先课设为“选修课”,初期只开了两门:《数学分析》和《高等代数》。从九年级开始,教学周期为两至三学年(四至六个学期)。后来应学生要求,又增开了《实变函数论》与《近世代数》。选课坚持“因材施教”的原则。学生完全自主选课,允许中途自由退出。课程的基本目的是:

(1)在讲授知识的过程中,培养学生进行严格逻辑推理的学术习惯;

(2)培养学生读书、自学的能力,为学生的自我发展打下坚实基础。

王昆扬为大先数学分析课程编写了教材,起初分为三册,第一册基础篇和第三册函数篇;后来把第一册和第三册合并成《数学分析》(王昆扬编)。

第二册代数篇直接使用了张英伯、王恺顺编写的北京师范大学数学系本科生《高等代数》教材。由于几位热爱数学的学生表现出色,又为他们开设了《近世代数》,仍然使用张英伯、王恺顺合编的本科生教材。此课截止到2024年春,已经开设了十届,目前正在进行第五—第十届。

三、大学先修课《数学分析》所解决的具体问题

(一)从有限到无限

基础篇的第一个目标是用现代集合论的观点,把中学生的眼界从“有限”拓展到“无限”。以 Hilbert 旅馆为例,老板如果只有有限间客房,一旦客满,就必须停止接待。而若老板的房间不只有有限间,而是每间标一个正整数为其房号:每个正整数都是一个房间的号码,不同的房间的号码不同,那么,即使眼下客满,仍然可以继续接待有限个旅客,甚至可以继续接待“和已入住的旅客一般多”的无限多旅客。这里看到了“有限”和“无限”的本质不同。

上面提到“和已入住的旅客一般多”,实际是“可数”概念的定义:能和正整数集合 $\mathbf{N}_+$ 建立一一对应(即可逆映射)的集合叫做可数集。

可数集是“最小的”无限集。称可数集具有基数(cardinal) $\aleph_0$ 。基数概念是有限集的元素数目的概念(对于无限集)的推广。不能与 $\mathbf{N}_+$ 建立一一对应的集合叫做不可数集。每个集合都具有基数:彼此一一对应的集合具有相同的基数。

宣布公理:任何两个集合都可以比较基数。

这里有一个经验:在严格讨论基数概念时, Bernstein 定理是不可少的。但其证明稍许麻烦。第一届大先课时,这个定理难住了不少同学。以后几届,采用暂且“承认”搁置证明的办法,以不影响学生的学习情绪,效果不错。

不可数集的基数严格大于 $\aleph_0$ 。

这是基础篇第一章要解决的主要问题。

(二)建立分数序列的极限的概念

用 $\mathbf{Q}$ 代表全体分数(rational numbers)的集合,一个分数序列指的是一个从 $\mathbf{N}_+$ 到 $\mathbf{Q}$ 的映射 f ,不过要把数 n 的像 $f(n)$ “排在”第 n 位,叫做序列或直称为数列的第 n 项,此数列记为 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ (记号 ∞ 叫做“无限”或“无穷”,也可特指正无穷)。

数列极限的定义严格使用 Cauchy 创立的 $\varepsilon - N$ 语言表述。

这是数学分析的灵魂概念。通过大量简单的习题,大先课的学生都能很好地接受。

下面主要介绍本课程基础篇所解决的中学数学课本涉及但没能解决的两个问题(或说漏洞)。

基础篇第三、四两章的目的是“识数——认识实数”,这是中学课本没解决的问题,或者说是一个“漏洞”。

(三) 建立分数的十进表示

流行的初中二年级数学课本中有下述定义.

定义 (rational number, irrational number, real number) 十进循环数叫做 rational number (比例数); 十进不循环数叫做 irrational number (非比例数), 统称为 real number (实数). 把十进数规范地写成

$$\alpha: = p + 0. a_1 a_2 \cdots, p \in \mathbf{Z}, a_k \in \mathbf{B}, k \in \mathbf{N}_+. \quad (1)$$

其中 $\mathbf{B}: = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 代表十进制基本数字的集合; 当小数点后的数字不全是 9 时, p 叫做 α 的整部, 用符号 $[\alpha]$ 表示. 整部 $p = 0$ 时, (1) 右端的 p 可隐去.

关于 rational number 及 irrational number 的中译名, 十一学校的课本中做了考证.

实数 α 用等号右端的符号表示的具体含义是什么?

课本中没讲! 这是一个漏洞.

即使一个熟知的分数, 例如 $\frac{1}{7}$, 把它表示成循环数, 即等式

$$\frac{1}{7} = 0. \dot{1}4285 \dot{7}$$

是什么意思? 又如, 熟知的不是分数的实数 2 和 π , 把它们表示成十进数, 即等式

$$\sqrt{2} = 1 + 0. 4142 \cdots, \pi = 3 + 0. 1415 \cdots$$

是什么意思?

我们在基础篇的第三章中对于上述定义的前一部分“十进循环数叫做 rational number (分数)”给予了严格的解释. 把分数 $\frac{n}{m}$ (其中 n 代表整数, m 代表正整数) 叫做分数 (rational number) 的本原表示.

引入一个辅助性 (但很重要) 的概念.

定义 (标准列) 把十进数 (1), 即 $\alpha: = p + 0. a_1 a_2 \cdots$, 与一个分数列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 对应起来, 其中分数

$$A_n = p + 0. a_1 \cdots a_n (n \in \mathbf{N}_+) \quad (2)$$

是小数点后只有 n 位的“有限小数”, 是本原表示的分数. 称数列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为与实数 α 对等的标准列.

第三章的基本结论是对“循环数叫做分数”一语的确切理解: 若 (1) 中 α 是循环数, 它对等的标准列记为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ (见 (2)). 那么存在本原表示的比例数 A 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A. \quad (3)$$

反过来, 任何一个本原表示的分数, 都存在一个循环数对等的标准列以它为极限. 在这个意义上, 说

α 是 A 的十进表示, 两者之间划等号. 这样, 比例数除了本原表示外, 又有了一个十进表示.

(四) 确切理解“不循环数叫做 irrational number”这是基础篇第四章的基本结论.

十进数 (见 (1) 式) 本来只是一个符号, 要使它们具有“数”的功能, 必须规定它们之间的算术运算, 大小关系等对于比例数已知的各种概念, 并保持新建立的一切概念与对于循环数的已知概念完全协调. 这些都通过标准列来完成.

第四章的基本结论是: 极限式 (3) 对于 irrational number (不循环十进数) 成立.

有了关于十进数的 (3), 我们就可以完成实数集 $\mathbf{R}$ 的重要理论.

先把关于分数序列及其极限的概念完全推广到实数序列的情形. 然后证明下述诸定理 (编号依原基础篇讲义):

定理 4.3.2 $\mathbf{R}$ 是完备的, 就是说, $\mathbf{R}$ 中的基本列一定收敛.

定理 4.3.3 rational numbers and irrational numbers 都在 $\mathbf{R}$ 中稠密.

定理 4.3.4 非空的有上界的实数集 A 一定有最小上界. 最小上界简称为上确界, 记作 $\sup(A)$. 非空的有下界的实数集 A 一定有最大下界, 简称为下确界, 记作 $\inf(A)$.

定理 4.3.5 单调有界的实数序列一定收敛.

定理 4.3.6 若闭区间 $I_n = [a_n, b_n] (n \in \mathbf{N}_+)$ 满足条件:

$$\textcircled{1} I_n \supset I_{n+1}, n \in \mathbf{N}_+;$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

那么存在唯一一个实数 c 使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}.$$

定理 4.3.7 有界数列有收敛的子列.

(五) 严格定义幂运算从而严格定义指数函数

高中一年级的课本上 (见《普通高中课程标准试验教科书数学 (B 版 · 必修 1)》, 人民教育出版社, 2007 年第 3 版, 2014 年第 18 次印刷, 第 88 页第 4 行) 说: “我们不能给出无理指数幂严格的定义”. (“无理数”是英文 irrational number——或其他同义外国文字的误译.) 也就是说, 幂运算, 以及随后引入的指数函数, 根本没有定义. 这是第二个漏洞.

基础篇第五章旨在填补这个漏洞.

第五章首先使用实数的十进表示, 证明了关于

开方的定理。(编号依原基础篇讲义)

定理 5.1.1 (正数的开方) 设 $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 0, m \in \mathbf{N}_+$. 那么存在唯一的 $\beta \in \mathbf{R}, \beta > 0$ 使得 $\beta^m = \alpha$. 称 β 为 α 的(正的) m 次方根, 简称为 m 次根, 记作 $\sqrt[m]{\alpha}$. 当 $m = 2$ 时, 简记 $\sqrt[2]{}$ 为 $\sqrt{}$.

然后定义正数的分数次幂.

定义 5.2.1 对于正数 a 和比例数 $\frac{m}{n}$, (其中 $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}_+$), 定义 a 的 $\frac{m}{n}$ 次幂为

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

最后把幂的定义从指数为分数的情形推广到指数为任意实数的情形。(基础篇讲义, 定义 5.2.2, 任意指数次幂. 内容从略.)

这样我们完全填补了高中课本对于幂运算的定义的严重漏洞. 从而严格地给出了指数函数的定义.

四、大学先修课《高等代数》与《近世代数》的基本情况

《高等代数》和《近世代数》两门课程使用的是北京师范大学数学专业本科生一年级和二级的教材, 由张英伯和王恺顺编著, 北京师范大学出版社出版. 其中《高等代数》添加了空间解析几何的内容, 分为下述 9 章: (0) 预备知识: 介绍了 1、2 阶行列式及其性质; 求和号和连乘号; 数域的概念. (1) 空间的直线与平面: 定义了向量与空间直角坐标系; 向量的内积与混合积; 空间平面及其方程; 空间直线及其方程; 位置关系, 夹角与距离. (2) 线性方程与矩阵: 线性方程组; 矩阵的运算; 矩阵的分块; 矩阵的秩. (3) 行列式: 行列式的定义; 行列式的性质; 行列式的展开; 行列式的应用. (4) 向量空间: 向量空间的定义; 向量的线性关系; 极大线性无关组; 基和维数; 基变换与坐标变换; 矩阵的行秩与列秩; 齐次线性方程组的解空间. (5) 线性变换: 线性映射和线性变换; 线性变换的矩阵; 特征值和特征向量; 可对角化矩阵; 哈密顿-凯莱定理. (6) 欧氏空间: 标准正交基; 正交变换; 对称变换. (7) 二次型; 实二次型. (8) 二次曲线与二次曲面: 平面中的二次曲线及其标准方程; 二次曲线一般方程的化简与分类; 空间中的二次曲面.

近世代数共有五章, (1) 群: 群的另一定义; 有限生成的子群; (2) 子群的陪集; 正规子群与商群; 群的同态; 单群; (3) 群在集合上的作用; (4) 西罗定理; (5) 合成群列; 可解群.

高等代数和近世代数课本涵盖了理科大学和师范类大学数学系相应课程的全部内容.

五、大学先修课在教学内容和教学方法上的尝试

(1) 教学内容的深入、严格没有难住学生, 而是激发了学生深入思考的兴趣.

例如, 第五届学生对于 Cantor 的实数理论深入学习之后, 对于 Cantor 的思想有了深入了解, 认识到数千年来人们对于实数的常识, 经 Cantor 的严格论述变成了“怪物”(intellectual monster), 通过对十进表示的深入研究得到了把怪物回归常识的办法. 他们把对此事的学习心得写成了小论文“化怪物为常识”.

又如青中国际部十年级两位 16 岁的学生黄冠翔、周润禾. 他们在大学选修课上充分表现了对知识的追求、对数学的热爱; 他们极强的理解力和领悟力, 使得教学工作非常顺利. 课本中的一些习题具有相当的难度, 他们全部独立完成, 轮流在习题课上站到黑板前讲解. 甚至能够独立讲述书中定理的证明, 并加以发挥. 在 2022 年一月的期末考试中, 高等代数使用了 2017 年全国 CAP 统一考试的 B 卷, 黄冠翔和周润禾分别得到了 92 分和 80 分的好成绩, 而历史上全国 CAP 高等代数统考的最高成绩为 71 分, 是青岛中学第一届毕业生李逸然得到的.

(2) 大学先修课的教学十分注意师生互动, 启发学生深入思考, 探讨解决问题的方法, 鼓励学生自己完成证明.

学生们喜欢这样的研究式的学习方法. 多数学生经过这种训练, 表示自己能够独立读懂课本, 并对课本内容进行正确的讲解. 我们现在正在第七届学生的课程中试行讨论班(seminar)式的教学, 最大限度地提高学习的效率, 培养学生独立学习、独立钻研的能力. 应学生主动要求, 我们给第五届学生讲授了“Lebesgue 积分”以及“近世代数”.

六、几点感悟

(1) 大学先修课的学术特征举例: 从任何集合 A 到 A 的幂集(即 A 的一切子集所成的集合) 2^A 无满射.

(2) 大先课内容应该密切联系中学数学课程的已有教学实践, 起点尽可能低, 开课尽可能早. 安排在高三不妥. 关于“十进数”的常识要承袭, 予以科学解读. 指数函数的概念借助幂运算引入而进行解析的拓广. 青岛中学的大先课是从 9 年级(初三)开始

的,持续3~4个学期。国际班的学生不参加高考,高三也可以继续上大先课。我们第五届的(现12年级)几个学生现在就读 Galois 理论,最近已经学完了。

(3)“以工科大学数学为标准”不妥。必须严格、系统。但学术水平不必封顶。

(4)学生自愿报名,量力而为,允许随时退出、随时复入。

七、学生的成绩

令我们十分欣慰的是,学习大学先修课程的学生都进入了美国等地的一流大学。

特别有趣的是,我们的第一届学生国筠谊学习文科,考入了美国范德堡大学。有一天我突然接到她的一条微信,告诉我在范德堡大学的全校新生考试中,特别注明不是全系,她名列第一。要知道她并没有完成全部数学分析和高等代数课程,只学了几个月就因故退出了!我马上回复了一条微信,向她表示热烈的祝贺。

我们还教过十一年级的大学先修课程,学生共有四名:张瀚文、吕泊筠、蒋宇轩和邢思远。这四位同学全部赴美留学。张瀚文和吕泊筠学习物理,蒋宇轩学习分子和细胞生物学;唯一的女生邢思远,尽管学习数学比较困难,但她考上了纽约大学艺术系,现在已经当导演了。

我们带的最后一届学生,是目前十二年级的李中原、黄冠翔、周润禾、苏彻。李中原提前一年毕业,考入剑桥大学。黄冠翔非常出色,他天资聪颖,热爱数学,刻苦认真,肯下力气。尤为难能可贵的是,他不但学习成绩优异,而且品德高尚,乐于助人。他还是青岛中学学生会副主席,爱乐乐团团长,萨克斯管演奏员。在一个寒冷的冬天,我进入教室准备上课,一看教室里只有周润禾、苏彻,就问他们黄冠翔去哪里了,话刚落音,黄冠翔气喘吁吁地跑过来了,头上直冒热气,双手冻得通红。我问他干啥去了?他说他刚才在操场上捡冰块来着。我很惊讶,问他“捡冰块干啥?”他说周一早晨有升旗仪式,全校学生都要在操场上集合,怕有人不小心滑倒。我赶紧让他坐下,在暖气上把手捂捂。

上大先课时黄冠翔严肃认真,一丝不苟,每次习题课我都让学生讲解,有时不太困难的章节也请同学上讲台讲课。黄冠翔经常第一个上台,讲得头头是道,一清二楚。他邀请自己的朋友周润禾一同上课,周润禾也是一个非常聪明,有极强理解力的孩子,只

可惜身体较弱,不时患病感冒。

黄冠翔的理想学校是英国剑桥大学。剑桥的入学考试非常严格,要经过笔试、口试、面试、面谈等等三十多次测试。当时黄冠翔需要完成学校的常规课程:按时交作业,参加每一门课程的考试。我对他说“你是不是先顾剑桥,把近世代数和实变函数暂时放一放。”他说:“老师,不用担心,我可以安排”。果然,他将时间安排得井井有条,所有的课程无一耽搁。我问他是不是熬夜了,他说老师放心,我从不熬夜,真不知道他是怎么做到的。

剑桥大学从网上发出录取通知的当天傍晚,周润禾到教室找我,说黄冠翔的录取通知书从网上发到学校校办了,现在正在校办公室接受大家的祝贺。我赶忙放下手中的工作,跟着他赶往校办。黄冠翔见到我,双手拉住我的手激动地说,“老师,我考上剑桥了,考上剑桥了!”我也特别激动,一叠连声地回答:“祝贺你!祝贺你!”

过了几天,周润禾也接到了新加坡国立大学数学系的入学通知。我们曾在新加坡国立大学访问过,那里聚集了东南亚一带最好的师资,数学系是相当不错的。与此同时,苏彻得到了英国帝国理工的入学通知,帝国理工是他一直向往的学校。

八、领导的重视

青岛中学大学先修课一直受到学校领导的高度重视和支持。秉承把“学生的发展放在第一位”的宗旨,青岛中学的领导和老师给予了大学先修课极大的重视和支持,以及自始至终的热情帮助。高中学部主任王东刚老师一直具体参与大学先修课的教学工作;数学组夏成林老师、李瑞瑞老师,还有国际部学生导师张悦铨等老师也对本课程给予诸多具体帮助;前任校长秦建云先生,现任校长汪正贵先生都十分关怀这门课程。领导和老师们对大学先修课程的重视和支持,是这门课程顺利进行的基本保障。

注:自从2017年建校,青岛中学一直在进行大学先修数学课程的教学。我们在这里对七年来教学的探索与实践做一个概述和总结。

【作者简介】王昆扬、张英伯,北京师范大学数学科学学院(100875);王东刚,青岛中学(266213)。

【原文出处】摘自《数学通报》(京),2024.8. 1~7