

## 【学科视点】

# 中国 HPM 发展之路

岳增成

**【摘要】**为了更好地促进中国 HPM 的发展,文章对中国 HPM 的发展历程、特点进行了梳理.由此发现:中国的 HPM 发展是一条融合之路,在融合的过程中,HPM 共同体坚守基础,积极借鉴国外成果,形成了以共同体支持下的 HPM 课例开发为核心的教学实践与教师专业发展的特色之路.

**【关键词】**HPM;发展历程;课例开发;教师专业发展

中国有灿烂的古代数学文明,数学史的研究也有较长的历史,并取得了不错的成就.中国的 HPM (History and Pedagogy of Mathematics, 数学史与数学教育)研究起步却相当晚,仅有十几年的时间,但已成为数学教育中最具活力的方向之一,有着自己独特的贡献.然而,与国际 HPM 40 余年的发展相比,中国的 HPM 研究时间尚短,还处于发展阶段,因此任重而道远.为了更好地发展 HPM 研究,我们既需要他山之石,也需要认清自己,本文将从纵向上梳理中国 HPM 的发展,以为中国 HPM 的发展带来启示.

## 一、从分离走向融合

HPM 在中国出现的标志性事件是 2005 年第一届全国数学史与数学教育会议的召开.在此之前及 HPM 出现的早期,由于方向上的藩篱,数学史聚焦于特殊性事件研究,数学具有普遍性与抽象性的特征,而数学教育则指向健全的人的培养,<sup>[1][2]</sup>数学史、数学教育研究沿着两条互不相干的路径展开.一是在数学史领域,与国外 HPM 出现之前的情形一样,我国早已有一些著名的数学史家在研究数学史、讲授数学史课程的过程中,认识到数学史的教育价值;一些数学史研究者从 20 世纪末开始在研究数学史的过程中,加入了教育的视角,试图通过教育取向的数学史研究为数学教育教学带来启示,并开发了一些较难实施的教学设计.一是教学实践层面,教材编写者在教材中点缀式地编入一些数学家的图片,介绍中国古代数学的一些成就,教师通过在课堂中附加式地讲解一些数学家的故事以激发学生的学习兴趣,

培养学生的爱国主义情怀.这导致了数学的历史顺序、知识的逻辑顺序、学生的认知顺序不能有机地整合在一起.但随着国内研究者对国外 HPM 教育价值的了解,人们对数学史教育价值的认识不再局限于数学情感、动机视角、激励因素等,开始认识到数学史对学生数学学习、数学和数学活动本质认识等的重要作用,且随着大量数学概念历史相似性的验证,即学生对某些数学概念的认识与古代数学家对这些概念的认识相似,学生对某些概念理解上的困难与历史上数学家遭遇的障碍一致,数学史与数学教育的关系开始密切起来,HPM 逐渐发展成为数学教育中的研究方向.

## 二、坚守基础与积极借鉴

HPM 的发展离不开学科基础的坚守、国外已有研究成果的借鉴.图 1 展示了目前 HPM 内部各个研究方向及其之间的关系.可见,教育取向的数学史研究是 HPM 的基础,国外 HPM 研究成果的借鉴是大陆 HPM 发展的重要推动力.

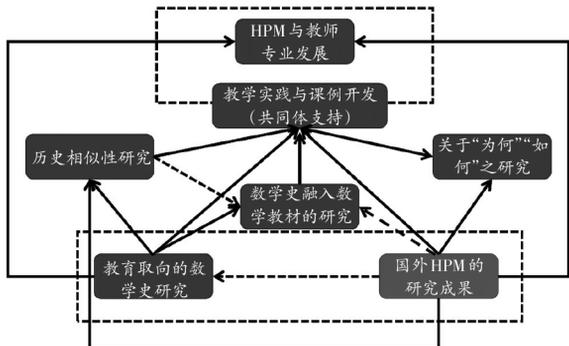


图 1 HPM 学科构成及其相互关系

### (一) 教育取向数学史研究

教育取向的数学史研究是 HPM 的基础,也正是因为它,其他方向的研究才得以顺利开展。尽管 HPM 萌芽于数学史教育价值的揭示,但它只是经验思辨的结果,而教育取向的数学史研究则是数学史与数学教育关系研究的开端。在国外,从 19 世纪 40 年代开始,泰尔凯(O. Terquem, 1782—1862)、德摩根(De Morgan, 1806—1971)、卡约黎(F. Cajori, 1859—1930)等就基于数学史的教育价值从教育的视角对数学史进行研究,提出了某些历史研究于教育教学的启示。在中国,在 HPM 出现以前,也有一些数学史研究者对历史上的人物与事件、概念与思想、运算与法则、问题与求解、公式与命题、工具与符号进行了教育取向的数学史研究。HPM 出现后,这些层面教育取向数学史的研究更为广泛,且随着数学史在教学实践中的广泛应用,研究趋于实用,即教育取向数学史研究的出发点发生了转移,不再为研究而研究,而是以实践需求为导向,且随着各级各类学校对数学史的运用,数学史著作或者数学著作中数学知识的研究已不能满足教学需求。于是,HPM 研究者将视角转向对西方早期数学教科书的研究,他们基于几十本或者上百本的西方早期教科书,搜寻出相关知识的记录,在质性分析的基础上,进行统计意义上的分析,以得出相关知识点的发展特点,并从中获得解决目前教学难点的启示。

### (二) 国外 HPM 研究成果借鉴

作为舶来品的 HPM,在中国的发展离不开对国外相关理论的借鉴,且 HPM 内部各个方向都有所借鉴:从早期对 HPM 先驱教育理念的介绍、HPM 历史渊源的梳理、HPM 教育价值的剖析,到后来大量中学数学概念历史相似性的验证、发生教学法理论基础的梳理及某些重要数学概念教学中发生教学法的应用、HPM 研究内容与方法的系统梳理,到现在对国际数学教育大会(International Congress of Mathematics Education)、HPM 卫星会议、欧洲暑期学校(European Summer University)等相关 HPM 活动的系统介绍,国外数学教育杂志中刊登的 HPM 文章的统计,国外数学史融入教学的评介,HPM 与教师专业发展关系的研究等。可见,中国对国际 HPM 成果的借鉴,紧跟 HPM 国际发展的方向,大致沿着从关于“为何”“如

何”之研究、教育取向的数学史研究、历史相似性研究,到教学实践与课例开发、HPM 与教师专业发展的顺序开展,且会根据需要对重要节点处国际 HPM 发展的现状进行剖析,比如对 HPM 历史渊源、研究内容与方法的纵向梳理,对能代表某一时期的发展状况的国际 HPM 会议进行横向的剖析。

### 三、在实践与理论的互动中,走向特色之路

HPM 的发展,除了学科基础的坚守与国外研究成果的借鉴外,研究主题的多样化、学派的创建是 HPM 专业发展与学科建设的重要标志与推动力量。<sup>[3]</sup>如前所述,中国 HPM 研究成果的借鉴过程也是一个研究主题不断扩充的过程,而学派的创建与研究主题的不断扩充紧密相关,因此这部分的论述将在研究主题介绍完之后进行。中国 HPM 的发展之路,实际上也是一条特色之路。图 2 展示的是中国 HPM 内部最重要的两个研究方向,HPM 与教师专业发展、教学实践与课例开发及其之间的关系,可见其核心恰是中国教育的特色之一——课例研究。

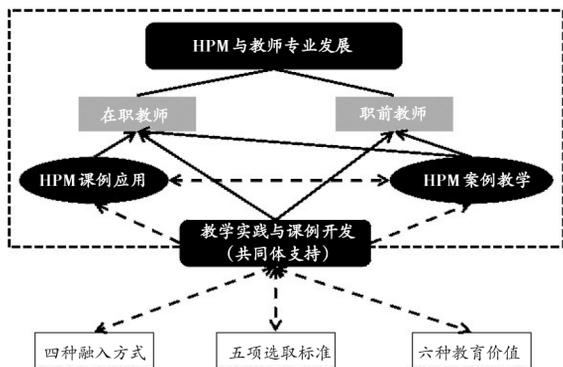


图 2 HPM 驱动下的教师专业发展体系

#### (一) 教学实践与课例开发

中国 HPM 的特色肇始于融入数学史的课例研究。在研究的初期,HPM 研究者并没有用过多的理论做指导,仅在教育取向数学史研究的基础上,结合历史相似性的调查,与教师合作开发课例,试图将知识的历史发生顺序、知识之间的逻辑顺序、学生的认知发展顺序融入相关主题的教学当中,并尽量实现数学史在知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观维度的目标,试图运用数学史解决某些概念教学过程中存在的疑难问题。随着教学实践的不断推进与课例的相继开发,研究者发现 HPM 实践中的一些共性的问题,开始结合国外 HPM 的相关理论,比如教

学实践中运用数学史的方式,提供直接的历史信息,借鉴历史进行教学,发展对数学及其社会文化背景的深刻认识,[4]点缀法、模块法、基于历史法,[5]总结出了数学史融入数学教学的四种方式:附加式、复制式、顺应式、重构式,[6]数学史料选取的五项原则:趣味性、科学性、新颖性、可学性、有效性,数学史的六种教育价值:知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效,数学史融入数学教学的课例研究流程:选题与准备、研讨与设计、实施与评价、分析与写作;[7]形成了 HPM 课例开发驱动下的、以 HPM 专家与授课教师为中心向外辐射到 HPM 研究团队、数学教师团队、教师专业发展指导者团队而形成的 HPM 共同体(如图 3)。在 HPM 共同体的支持下,研究者以五项选取原则、四种融入方式、六种教育价值为指导原则,反哺于教学实践,开拓了数学史应用于数学教学的新形式:从单个 HPM 课例的开发,到某一单元多个连续知识点构成的模块的开发,比如沪教版五年级上册的“几何小实践”单元,包括平行四边形、三角形、梯形三类图形的面积,到同一学段跨年度的模块开发;比如从沪教版二年级下册“角的初步认识”到四年级下册的“角”,到跨学段模块的开发;比如从沪教版四年级下册“位置的表示方法”(用数对表示物体的位置)到七年级下册“平面直角坐标系”。

的成果应用于课堂教学,很少有研究予以关注。在我国,由于现代数学演绎推理体系与我国古代数学归纳推理传统的不相一致,要想从中国古代、近代数学著作中查找概念的发生、发展的历程难度较大,而对教师而言,查找、筛选外文文献耗时多且困难大,即使教师具备了教育取向数学史研究的能力,“无米之炊”仍是无法跨越的“天堑”,与较好地将数学史应用于教学还有相当大的距离。因此,HPM 研究团队采取指导教师开发课例的形式(起初仅是 HPM 专家与授课教师之间的合作,后来发展到 HPM 研究团队与教师团队的合作,现在是如图 3 所示的共同体中多个团队的合作)来促进教师的专业发展:课例确定后,HPM 研究团队查阅史料、选取素材,教师团队分析需求,然后,各个团队一起交流研讨相关主题的设计,随后,授课教师进行教学设计,在共同体的帮助下打磨教学设计、进行试教,试教后各个团队根据教学效果进行研讨,提出修改的方向,试教与研讨可能会进行多轮,最后公开课展示,授课教师整理教学实录,撰写案例。在“做中学”的过程中,在投入大量时间、精力的保障下(一个课例的开发甚至持续一个多月的时间),授课教师的知识实现了增长,信念发生了转变,尽管增长的一些知识仅与开发的课例相关。[8]

鉴于课例开发投入较大的缘故,HPM 共同体试图最大限度地发挥 HPM 课例开发过程以及开发出的课例的作用,于是,他们借助教师专业发展指导者,主要是教研员、名师工作室主持人的力量,让更多的教师参与到授课教师 HPM 课例的展示中来。事实上,这仅是 HPM 案例教学的一种方式。虽然在这种 HPM 案例教学中教师能够亲临教育现场,但与教师培训中的 HPM 案例教学相比,参与教育现场的 HPM 案例教学系统性不够、针对性不强。教师培训中的 HPM 案例教学是一门系统课程,参与的教师以小组合作、独立思考的形式参与任教学段多个 HPM 课例的研讨。案例的研讨从找出相关主题的教学难点开始,然后培训者提供相关主题的历史史料,受训者对史料进行分析,讨论史料能否解决教学难点问题,培训者呈现已开发的相关主题的课例,重点讲述课例开发者运用数学史解决教学难点问题的方式、方法,最后受训者对呈现的课例进行讨论。在整个案例教学的过程中,培训者渗透 HPM 的相关理论,从而

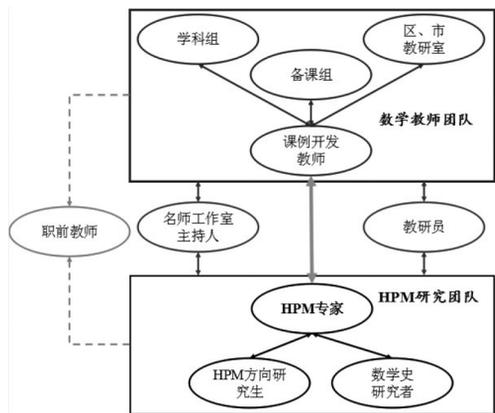


图3 HPM 共同体支持下的教学实践与课例开发

## (二) HPM 与教师专业发展

### 1. 在职教师的专业发展

在国外,高校研究团队运用 HPM 对数学教师的培训往往以使教师具备进行教育取向数学史研究的能力为目的,至于受训者能否将相关主题历史研究

使受训者对 HPM 有更为系统的了解。

但无论是 HPM 课例开发还是 HPM 案例教学,对 HPM 理念的传播作用有限,所以难度较小、投入精力较少,因此教师擅长的课例应用就成了传播 HPM 理念、促进教师专业发展的重要方式之一。所谓的 HPM 课例应用,就是教师搜索到相关主题已开发的 HPM 课例后,按照“研读教材、教参,对教学目标、重难点进行再定位;根据教学目标、任教班级的实际情况,研读已开发的 HPM 课例,主要找出其中的问题,并予以完善,进行试讲;根据试讲效果,对教学设计进行再修改;反思课例应用的全过程”的顺序开展活动。对教师而言,HPM 课例应用也是“做中学”的方式之一,只是对 HPM 的认识没有 HPM 课例开发深刻。

## 2. 职前教师的专业发展

相对于在职教师,HPM 驱动下的职前教师培养途径有所不同,且本科阶段与研究生阶段各有侧重。于本科师范生而言,传统的数学史课程以介绍历史取向的数学史为主,但这种课程对职前教师将来学科教学用途不大,因此数学史课程的讲授需要加入教育的视角,让学生知悉数学史与教学内容的关系,并辅以 HPM 案例教学,使师范生对数学史如何融入数学教学有一定的认识。于研究生师范生而言,使其具备教育取向数学史研究的能力是课程设置的目標,因此教育取向数学史研究成果的介绍是课程的重点,使其具备将数学史融入数学教学的能力是课程设置的愿景,因此,HPM 案例教学是课程讲授的又一重点,且与本科师范生相比,研究生师范生有较多的机会参与到 HPM 课例展示的现场中来,从而有较多机会参与教育现场的 HPM 案例教学。

## 四、未来的路

HPM 在中国的发展取得了长足的进步,但仍有很大的发展空间。在未来的发展过程中,学科基础仍要坚守,国外的研究成果仍需借鉴,理论与实践的互动还需加强;同时,要进一步完善 HPM 驱动下的教师专业发展体系,探索 HPM 驱动下的教师专业发展的最佳入口与高效的路径组合,毕竟目前 HPM 课例开发这一入口难度大,且对路径组合效果的研究缺

失;此外,数学史融入数学教材的研究还需要进一步加强,必须突破目前以显性数学史研究为主的现状,将数学史更多地以顺应式(教材正文各栏目中对历史上数学问题进行改编,使之具有适合于今日课堂教学的情境或属性)、重构式(教材正文各栏目中借鉴或重构知识的发生、发展历史,以发生法来呈现知识)<sup>[9]</sup>的形式编入数学教材,以便教师更好、更容易地将数学史融入数学教学。

## 参考文献:

- [1] Otte, M. Mathematical history, philosophy and education [J]. Educational Studies in Mathematics, 2007, 76(2): 243 - 255.
- [2] Fried, N. Didactics and history of mathematics: Knowledge and self - knowledge [J]. Educational Studies in Mathematics, 2007, 76(2): 203 - 223.
- [3] 徐章韬. 面向研究生教育的专业建设之路探微[J]. 数学教育学报, 2016(3): 48 - 51.
- [4] Tzanakis C, Arcavi A. Integrating history of mathematics in the classroom: An analysis survey [G]//Fauvel J, Van Maanen J. History in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000: 201 - 240.
- [5] Jankvist U. T. A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education [J]. Educational Studies in Mathematics, 2009, 71(3): 235 - 261.
- [6] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012(2): 1 - 5.
- [7] [9] 汪晓勤. HPM 视角下的小学数学教学[J]. 小学数学教师, 2017(7/8): 77 - 82.
- [8] 岳增成, 汪晓勤. HPM 案例驱动下的小学数学教师专业发展——以“角的初步认识”为例[J]. 基础教育, 2017(2): 96 - 103.

**【作者简介】**岳增成, 杭州师范大学教育学院(311121)。

**【原文出处】**《教学月刊》: 小学版(杭州), 2019. 11. 6 ~ 10

**【基金项目】**2019 年云南省教育厅科学研究基金项目(项目编号: 2019J0857)。