

疫情环境下价格导向的防护物资 最优生产分配机制研究

陶 杰 高 岩

【摘 要】新型冠状病毒疫情导致防护物资匮乏,增加了医护人员受感染的风险。现构建了防护物资最优生产-分配-定价模型,并在此基础上提出了广义影子价格的概念,以此作为防护物资定价的参考和依据,通过价格引导生产型企业合理扩大生产规模,以解决当前防护物资短缺的困难。广义影子价格反映了企业产能提升成本等因素,相比传统影子价格更适用于为防护物资统一定价。另外,利用广义影子价格与拉格朗日乘子集合之间的联系,提出了一个线性规划模型用以计算广义影子价格。数值仿真结果说明了广义影子价格在防护物资定价上的适用性。

【关 键 词】冠状病毒;防疫物资;定价;影子价格

【作者简介】陶杰,上海理工大学管理学院;高岩(通讯作者),上海理工大学管理学院,E-mail:gaoyan@usst.edu.cn(上海 200093)。

【原文出处】《运筹学学报》(沪),2020.1.13~22

【基金项目】国家自然科学基金(Nos. 71601117, 71704101),上海市软科学重点研究项目(No. 19692104600),教育部人文社科基金(No. 17YJC630094)。

0 引言

2019年12月初在武汉出现新型冠状病毒感染肺炎“COVID-19”疫情。截至2020年2月23日,全国累计感染新冠病毒77048例,累计死亡2445例,重症病例10968例^①。新冠病毒传染性强、潜伏期长、人群普遍易感,因此感染人数多,在较短的时间内迅速蔓延至全国各地,严重威胁人们的健康和生命安全。新冠病毒主要传播途径是通过咳嗽、喷嚏以及接触来自动物、人类或受污染物品进行传播,目前尚无已确认的安全的针对性治疗方法,可使用抗病毒药物控制病情^[1]。医务工作者处在防控工作的第一线,与患者直接接触,极易导致新型冠状病毒肺炎在医患之间、患者之间的传播和流行,出现医院感染的暴发,使医院医疗工作瘫痪^[2]。

疫情之下,防护服、口罩等防护物资是医务人员抗击疫情非常重要的个人防护用品。防护服可以阻止各类可能携带病原体的分泌物、喷溅物、颗粒物等接触人体,保护医务人员健康,是战胜新冠肺炎疫情

的重要防护用品^[3]。医疗机构按感染风险大致可分为三类:低风险区(办公室、食堂、会议室等)、中等风险区(普通病房、门诊等)和高风险区(发热门诊、呼吸病区等),不同的区域适合不同类型的防护服。由于防护不足和防护过度都会增加感染的风险,所以国家卫生健康委员会出台了《新型冠状病毒感染的肺炎防控中常见医用防护用品使用范围指引(试行)》文件,指导医疗机构防护物资使用。但疫情期间,各地医疗机构(尤其是湖北武汉)对防护物资需求激增,不同程度出现医疗设备、防护设施、消毒物品等资源不足的情况^[4],其中医用防护服最为紧缺^②。防护物资缺乏导致这些指引文件无法落地,也增加了医护人员乃至居民感染的风险。虽然通过接受捐赠一定程度上可以缓解医疗机构防护物资缺乏的问题,但是从根本上看,优化防护服的生产规模和分配方式,才是解决防护品缺乏的根本之道^[5]。根据《2020—2025年中国医用防护服行业市场前景及投资机会研究报告》数据显示:目前我国大型医用防

防护服生产企业共 48 家,主要集中在华中、华东地区,这些企业包含了国有和私营企业。为了缓解防护物资缺乏的压力,在疫情期间还有很多非防护物资生产企业也加入到防护物资生产中。对于国有企业,政府部门可以通过管控的方式提升国有企业的产量,但是对于其他类型的企业(比如私营、民营企业),政府无法通过行政手段促使企业提升产能,以使得全社会防护物资生产量达到最优。所以,为防护物资制定合理的价格,以价格为驱动引导每个生产型企业在最优产量范围内进行生产,是有效解决当前防护物资匮乏的最有效的途径。

根据《中华人民共和国价格法》规定,我国大多数商品和服务价格实行市场调节,即:由经营者自主制定,通过市场竞争形成的价格。当市场价格总水平出现剧烈波动等异常状态时,国务院可以在全国范围内或者部分区域内采取临时集中定价等紧急措施。据此可以认为:防护物资价格在平时是由市场决定的。但在疫情期间,由于防护物资短缺,市场价格出现严重扭曲,各地政府对防护物资实行统一管控,此时防护物资的价格则由政府统一定价。对于防护服、口罩一类的防护物资,如何科学、合理地定价,是一个重要问题。一方面合理的价格有助于激励生产企业提升产能,缓解紧缺物资短缺的压力^[6];另一方面科学地定价有助于避免生产商盲目扩大生产而造成资源的浪费^[7]。

基于此,本文以防护服为例,提出防护物资最优生产-分配-定价模型,旨在通过制定合理的价格,引导生产型企业在最优生产规模下进行生产活动,以解决疫情环境下防护物资短缺匮乏的问题。

1 符号说明和预备知识

1.1 符号说明

若无特殊说明,本文所用的向量范数均指欧几里得范数; $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧式空间;对于不等式约束 $g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m$,我们用 $A(x^*)$ 表示在 x^* 点起作用的这些不等式约束的集合,即 $A(x^*) = \{i | g_i(x^*) = 0, i=1, \dots, m\}$; ∇ 表示梯度算子;对于函数 $f(x)$ 和定义域内的某点 x^* , $\partial f(x^*)$ 代表 $f(x)$ 在点 x^* 处的次梯度, $f'(x^*; d)$ 表示函数 $f(x)$ 在 x^* 点处的沿方向 d 的方向导数;对于集合 $\mathbf{X}$ 和某点 $x \in \mathbf{X}$, $T_{\mathbf{X}}(x)$ 表示 $\mathbf{X}$ 在 x 点处的切锥。

1.2 预备知识

在疫情环境下,本文以防护服为例提出防护物资的生产、分配和定价方法。首先,我们对防护服的用途作一些合理性的假设。

假设 1.1 该地区生产的防护服仅用于医护人员日常防护工作。

其次,我们给出与本文密切相关的预备知识。考虑一般凸优化模型:

$$\begin{aligned} \min_x & f(x) \\ \text{s. t. } & g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m, \\ & x \in \mathbf{X}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 $f, g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一阶连续可微的凸函数, $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是闭凸集。我们先给出拉格朗日乘子的概念^[8]。

定义 1.1 假设 x^* 是模型(1.1)的最优解,若存在 $\lambda \in \mathbb{R}^m$ 满足:

$$\begin{aligned} (1) & (\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*))^T y \geq 0, \forall y \in T_{\mathbf{X}}(x^*), \\ (2) & \lambda_i \geq 0, i=1, \dots, m, \\ (3) & \lambda_i = 0, \forall i \notin A(x^*), \end{aligned}$$

其中 $A(x^*) = \{i | g_i(x^*) = 0, i=1, \dots, m\}$, $T_{\mathbf{X}}(x^*)$ 是 $\mathbf{X}$ 在 x^* 点处的切锥,则 λ 称为模型(1.1)关于 x^* 的拉格朗日乘子。

定义 1.2 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$,若对于任意的点列 $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$,必有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty$,则称函数 f 是强制的。

对于优化模型(1.1),我们将价值函数 $\nu: \mathbb{R}^m \rightarrow [-\infty, \infty]$ 定义为

$$\nu(u) = \min_{x \in \mathbf{X}} \{f(x) | g_i(x) \leq u_i, i=1, \dots, m\}.$$

由于价值函数是一个广义实值函数,所以我们给出价值函数是正常凸函数的必要条件。

引理 1.1 假设 $f, g_1, \dots, g_m: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ 是凸函数, $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是非空凸集。若函数 f 还是强制的,则 ν 是定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的正常凸函数。

接下来我们给出方向导数存在性条件以及方向导数与函数次微分集合之间的关系^[9]。

引理 1.2 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ 是一个正常凸函数, $x \in \text{int}(\text{dom}(f))$,则对于任意的非零向量 $d \in \mathbb{R}^n$, f 在 x 点处关于 d 的方向导数 $f'(x; d)$ 存在。

引理 1.3 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ 是一个正常凸

函数, $\partial f(x)$ 是函数 f 在 x 点处的次微分, 则对于任意的 $x \in \text{int}(\text{dom}(f))$, $d \in \mathbb{R}^n$, 成立 $f'(x; d) = \max_{g \in \partial f(x)} g^T d$ 。

最后我们简介影子价格的相关理论。影子价格是运筹学领域所关心的基本问题之一, 最初由丁伯根和康托洛维奇分别独立提出, 它指的是资源在被最优利用的状态下, 增加一单位稀缺资源所能获得的超额剩余价值^[10]。影子价格客观反映了资源的稀缺程度, 常被用于公共物品和稀缺资源的价格指导。因此利用影子价格来指导防护服、口罩等防护物资的定价, 有利于稳定市场, 实现资源的优化配置。在利用数学规划模型对经济活动进行建模时, 拉格朗日乘子常被解释为资源的影子价格, 这也为影子价格的刻画提供了方便^[11]。然而, 直接把拉格朗日乘子当作影子价格有三个弊端:

(1) 当拉格朗日乘子不唯一时, 并不是所有的拉格朗日乘子都可以作为影子价格。我们引用 Jansen 等^[12]的一段话来说明该问题的重要性:

当拉格朗日乘子不唯一时, 利用现成的商业优化软件计算影子价格容易出现偏误, 这样求出的影子价格会造成投资决策的失误……

对于该问题, Bertsekas 等^[13]提出了信息乘子的概念, 并说明最小范数拉格朗日乘子是信息拉格朗日乘子。Tao 和 Gao^[14]证明了信息乘子和影子价格之间的等价性, 使得多重乘子情形下影子价格是可计算的, 并在此基础上给出了多重乘子下计算影子价格的算法, 为影子价格计算提供了途径。

(2) 即使拉格朗日乘子唯一, 也不宜将其直接作为影子价格。比如当模型的约束条件是每个防护服生产商的产能约束时, 它们所对应的拉格朗日乘子向量的各个分量可能是不同的。因此若以乘子作为政府采购防护服的价格, 就会造成政府对不同的生产商定价不同, 缺乏公平性和合理性。另一方面, 还有可能会出现某些生产商产能约束对应的拉格朗日乘子为零, 但这并不能说明这些生产商生产的防护服可以被无偿征用。

(3) 传统单一资源的影子价格应用范围有限, 很容易造成决策错误。比如在多重乘子情形下, 可能出现每种资源各自的影子价格为零, 但当这些资源按一定比例增加时会出现社会的整体效用增大的现象。马赞甫^[15]指出单一资源的影子价格并不能指导

多种资源的优化配置, 实际应用中组合影子价格更为实用。

基于此, 本文在第 2 节提出广义影子价格的概念。广义影子价格不同于传统单一资源的影子价格, 它适用于多重拉格朗日乘子的情形, 且反映了不同企业产能提升的成本, 可以帮助政府对管控物资实施全社会统一定价。为了刻画和计算广义影子价格, 本文以社会福利最大化模型为基础, 对疫情期间的防护物资的生产、分配和定价进行建模和分析, 为政府对防护物资制定合理的价格提供决策依据。

2 防护物资最优生产 - 分配 - 定价模型

2.1 防护服最优生产 - 分配 - 定价模型

本节我们对防护服的生产、分配、定价问题进行建模。假设某地区共有 m 个防护服生产商, r 个医院。设 x_{ij} 表示由第 i 个生产商提供给第 j 个医院防护服数量, c_i 表示第 i 个生产商的产能, l_j 表示第 j 个医院所需防护服的最低数量, $U(x)$ ($x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^m$) 表示该地区生产的防护服产生的整体效用, $C(x)$ 表示该地区生产的防护服所耗费的成本。

据此我们可以建立防护服最优生产 - 分配 - 定价模型如下:

$$\begin{aligned} \max_x & U(x) - C(x) \\ \text{s. t.} & \sum_{j=1}^r x_{ij} \leq c_i, i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq l_j, j = 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}_+^m$ 。需要注意的是, 防护服生产数量 x_{ij} 应该是正整数, 但由于防护服的生产量和需求量较大, 为了讨论方便可以将其看作在正实数范围内取值并在求得最优解后通过取整的方法来获得防护服的最优生产量和分配量。

模型(2.1)称为社会福利最大化模型, 其目标函数是社会总福利, 为效用函数和成本函数的差。其中效用函数 $U(x)$ 表示消费者在消费中所获得的效用与所消费的防护服数量 x 之间的关系, 以衡量消费者从消费既定商品中所获得满足的程度。模型(2.1)的经济意义是制定防护服最优生产、分配计划以使得由此而产生的整个社会的福利最大, 即: 这种生产、分配方式在经济学上是帕累托有效的。从微观经济学角度来看, 效用函数满足非递减性和边际

效用递减性^[16],即:

(1)非递减性。防护服的边际效用 $\frac{dU(x)}{dx}$ 是非递减的。

(2)边际效用递减性。防护服的效用函数是一个凹函数,或 $\frac{d^2U(x)}{dx^2} \leq 0$ 。

在实际应用中,通常采用凹二次函数对一般效用函数进行拟合。模型(2.1)中的成本函数表示生产防护服总成本 C 和所生产出防护服的数量 x 之间的关系。由于防护服生产属于服装加工行业,该行业的特点是变动成本(即:原材料成本和人工成本)所占比重较大,在总成本中所占比例超过80%,而固定成本(比如:购置生产线所费成本)所占比重较小^[17],所以可以认为其生产成本 C 可近似看作是产量 x 的线性函数。因此我们对模型(2.1)中的效用函数和成本函数作如下假设。

假设 2.1

$$U(x) = \sum_{i,j} U(x_{i,j}), U(x_{i,j}) = bx_{i,j} - \frac{a}{2}x_{i,j}^2, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r,$$

$$C(x) = c \sum_{i,j} x_{i,j},$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 为生产防护服的单位成本。

由假设 2.1 可知,模型(2.1)是一个凸优化模型,根据其最优解 x^* 便可为整个地区防护服的生产 and 分配进行合理的规划。同时注意到模型(2.1)的约束条件为线性不等式约束,且存在非零的 $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^{mr}$ 满足约束条件,因此由非线性 Farkas 引理^[8]可知,模型(2.1)满足强对偶性。在决策者知晓防护服最优生产量和最优分配计划(即模型(2.1)的最优解 x^*)后,需要通过制定合理的价格引导生产型企业的最优生产量上进行生产。正如第 1 节中所述,在疫情期间市场价格扭曲,不能用来为防护服定价,因此我们基于模型(2.1)利用影子价格为防护服定价提供参考和依据。

假设 x^* 是模型(2.1)的最优解, $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \dots, \mu_r^*$ 为模型(2.1)中前 $m+r$ 个约束对应的拉格朗日乘子,则由定义 1.1 可知 $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mu^* \in \mathbb{R}^r$ 应满足:

$$(b - ax_{ij}^* - c - \lambda_i^* + \mu_j^*)x_{ij}^* = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r,$$

$$b - ax_{ij}^* - c - \lambda_i^* + \mu_j^* \leq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r,$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \mu_j^* \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r,$$

$$\lambda_i^* = 0, \mu_j^* = 0, i, j \notin A(x^*). \quad (2.2)$$

下面我们基于拉格朗日乘子研究防护服的定价机制。如第 1 节中所述,影子价格在计划经济下为产品定价提供了科学的依据,在疫情时期重要防护物资须由政府统一管控,防止市场价格偏离产品实际价值,出现哄抬物价的现象。因此,影子价格适合用来为受管控的防护物资定价提供参考和依据。由影子价格的定义可知,防护服的影子价格为在当前最优生产状态下,增大一件防护服的供应所能带来社会福利增加的量。在模型(2.1)中,前 m 个约束为 m 个生产商的产能约束,因此其对应的拉格朗日乘子 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 一定程度上可以反映防护服的影子价格信息。然而正如第 1 节中所指出, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 可能各不相同,因此对不同的生产商实施不同的采购价格显然是不合理的。更进一步,用单一生产商的影子价格作为防护服定价的标准也是不合理的。因为防护服的影子价格应该是全社会防护服增产带来的边际收益,而不是某个生产商增产而产生的边际收益。另外,生产商规模大小对防护服价格也有影响。受到筹资难度、生产要素等因素制约,规模小的企业产能提升 1 个单位所需成本会高于规模大的企业。基于此,我们提出广义影子价格的概念,并将其应用在防护服定价问题上。

考虑如下带扰动项的防护服定价模型:

$$\max_x v(\alpha, \beta) = U(x) - C(x)$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^r x_{ij} - C_i \leq a_i, i = 1, \dots, m,$$

$$l_j - \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq \beta_j, j = 1, \dots, r, \quad (2.3)$$

其中 $x \in \mathbb{R}_+^{mr}$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ 为产能约束的扰动项, $\beta \in \mathbb{R}^r$ 为需求约束的扰动项, v 为价值函数。由引理 1.1 可知,价值函数 v 是正常的凹函数。由于防护服的影子价格是指生产商产能提升量带来的边际收益,所以在模型(2.3)中仅考虑当产能约束扰动时价值函数的变化量,即 $\beta = 0$ 。根据影子价格定义,当价值函数 v 可微时第 i 个生产商生产防护服的影子价格为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{v(\delta e_i, 0) - v(0, 0)}{\delta},$$

其中 e_i 是第 i 个分量为 1、其他分量为 0 的单位向量。当价值函数 v 不可微时, Aucamp 和 Steinberg^[18] 以及 Akgül^[19] 提出了买入价格和卖出价格的概念。第 i ($i \in \{1, \dots, m\}$) 个生产商生产防护服的买入价格 p_i^+ 和卖出价格 p_i^- 分别定义为

$$p_i^+ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{v(te_i, 0) - v(0, 0)}{t}, p_i^- = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(te_i, 0) - v(0, 0)}{t}.$$

然而买入价格和卖出价格均是单一资源的影子价格,并不适合对诸如防护服、口罩一类的防护物资统一定价。因此,我们提出广义影子价格的概念。

定义 2.1 给定单位向量 $d \in \mathbb{R}^m$ 满足 $\|d\| = 1$ ^③, 若价值函数 v 在零点处沿 d 的方向导数

$$p(d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{v(td, 0) - v(0, 0)}{t}$$

存在, 则称 $p(d)$ 为沿方向 d 的广义影子价格。

从定义 2.1 可以看出, 广义影子价格是经典影子价格的推广。特别地, 若价值函数 v 在原点处满足 $0 \in \text{int}(\text{dom}(v))$, 则由引理 1.2 可知, v 在原点处沿任意单位方向的方向导数存在, 此时广义影子价格是买入价格和卖出价格的推广, 即 $p(e_i) = p_i^+$, $p(-e_i) = p_i^-$, $i = 1, \dots, m$ 。广义影子价格与买入价格和卖出价格不同, 它不是单一资源的影子价格, 而是一个整体价格。从经济意义上看, 广义影子价格指的是当所有 m 个生产商按照比例 $d_1 : d_2 : \dots : d_m$ 增加一个单位产能时, 社会整体效用增加的量, 即政府采购防护服的价格。以广义影子价格为防护服等防护物资定价有两个优势: 首先, 广义影子价格 $p(d)$ 是方向 d 的实值函数, 以广义影子价格作为防护服价格, 可以实现政府对防护服的统一定价, 避免出现对不同生产商区别定价现象; 方向 d 反映了各防护服生产商产能增加的能力, 对于生产规模较小的企业 i , 其产能提升难度较大, 所以其对应的 d_i 就小一些。特别地, 对于一些处于初创期的企业来说, 其对应方向 d 的分量可以取为零; 相反地, 对于生产规模较大的企业 j , 其产能提升空间较大, 所以其对应的 d_j 就大一些。方向向量 d 的选择体现了政府的政策导向和对企业的扶持力度, 我们将向量 d 称为产能提升比例向量。

值得注意的是广义影子价格虽然可以作为防护服等防护物资合理定价的依据, 但直接利用定义 2.1 却很难直接求出广义影子价格, 因此需要分析广义

影子价格的刻画和计算方法。

定理 2.1 设 v 是模型(2.3)中的价值函数。若 $0 \in \text{int}(\text{dom}(v))$, 则对于任意 $d \in \mathbb{R}^n$, 广义影子价格

$$p(d) = \min_{(\lambda, \mu) \in M(x^*)} \lambda^T d,$$

其中 $M(x^*)$ 是模型(2.1)在 x^* 处的拉格朗日乘子集合。

证明 首先由于模型(2.1)中目标函数是强制的凹函数且约束条件是线性约束, 所以价值函数 v 是正常的凹函数。其次, 注意到模型(2.1)在 x^* 强对偶性满足, 因此根据价值函数次梯度集合与拉格朗日乘子集合关系^[9]可知: 当 $0 \in \text{int}(\text{dom}(v))$ 时,

$$\partial v(0, 0) = M(x^*).$$

另一方面由引理 1.2 和 1.3 可知: 在 $0 \in \text{int}(\text{dom}(v))$ 条件满足时, 价值函数 v 在零点处沿任意单位方向 $d \in \mathbb{R}^{m+r}$ ($\|d\| = 1$) 的方向导数存在, 且

$$v'(0, 0; d)^{\text{④}} = \min_{(\lambda, \mu) \in \partial v(0, 0)} \sum_{i=1}^m \lambda_i d_i + \sum_{j=1}^r \mu_j d_j.$$

因此, 由广义影子价格的定义可知:

$$p(d) = \min_{(\lambda, \mu) \in \partial v(0, 0)} \sum_{i=1}^m \lambda_i d_i = \min_{(\lambda, \mu) \in M(x^*)} \lambda^T d,$$

即证。

定理 2.1 广义影子价格与拉格朗日乘子联系起来, 通过在拉格朗日乘子集合中找出某个特定的乘子使得该乘子与产能比例提升向量的内积达到最小, 那么该最小值就是广义影子价格。由定理 2.1 和式(2.2)可知, 当给定产能提升比例向量 d 后, 防护服的广义影子价格可以由如下线性规划求得:

$$\begin{aligned} \min & \lambda^T d \\ \text{s. t. } & b - ax_{ij}^* - c - \lambda_i + \mu_j = 0, i, j \in I > 0, \\ & b - ax_{ij}^* - c - \lambda_i + \mu_j \leq 0, \\ & \lambda_i \geq 0, \mu_j \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r, \\ & \lambda_i = 0, \mu_j = 0, i, j \notin A(x^*), \end{aligned}$$

其中 $I_{>0} = \{ij | x_{ij}^* > 0\}$ 。由于线性规划模型易于求解, 且当前有不少成熟的软件可以求解线性规划模型, 所以广义影子价格也易于求得。

2.2 一般防护物资最优生产 - 分配 - 定价模型

防护服最优生产 - 分配 - 定价模型可以推广至一般防护物资的生产、分配和定价。本小节以口罩为例, 在防护服模型的基础上提出口罩最优生产 - 分配 - 定价模型。与防护服不同, 口罩的使用者除

了医护人员之外还包括该地区所有居民,并且口罩对于居民的效用和对于医护人员的效用是不同的。因为在疫情期间居民使用口罩主要用于出行,所以当每个居民分配的口罩数量超过一定量时,多余的口罩效用便降为零。因此政府对于居民口罩的分配是有限额的。

设该地区共有 m 个口罩生产商, r 个医院。设 x_{ij} 表示由第 i 个口罩生产商提供给第 j 个医院口罩数量, y_i 为第 i 个口罩生产商提供给居民的口罩数量, c_i 表示第 i 个口罩生产商的产能, l_j 表示第 j 个医院所需口罩的最低数量。假设该地区居民每天分配到的口罩总量的下界和上界分别是 k_1 和 k_2 , 则口罩生产 - 分配 - 定价模型可构造如下:

$$\begin{aligned} & \max_{x,y} \sum_{i,j} (bx_{ij} - \frac{a}{2}x_{ij}^2) - c \sum_{i,j} x_{ij} \\ & \text{s. t. } \sum_{j=1}^r x_{ij} + y_i \leq c_i, i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq l_j, j = 1, \dots, r, \\ & k_1 \leq \sum_{i=1}^m y_i \leq k_2, \\ & x \in R^{mr}_+, y \in R^m_+. \end{aligned} \tag{2.4}$$

模型(2.4)的最优解 $x^* \in R^{mr}$ 和 $y^* \in R^m$ 为口罩的生产和分配提供了最优决策方案。同样地,根据模型(2.4)中前 m 个约束对应的拉格朗日乘子和产能提升比例向量,我们可以通过求解线性规划求得口罩的广义影子价格,作为口罩的定价的依据。口罩广义影子价格刻画和计算类似于防护服广义影子价格的刻画和计算方法,因此我们不再赘述。

3 数值仿真

本节我们以防护服为例,通过数值模拟仿真来展示防护服生产 - 分配 - 定价模型的应用效果,并讨论模型中参数的选取和设置方法。假设某地区有 5 家医院和 3 家防护服生产企业,每家医院每日对防护服需求量为不少于 500 件。另假设 3 家防护服生产企业分别为大、中、小型企业,其产能分别为每日生产防护服 1500 件、1000 件和 800 件,每件防护服的生产成本为 50 元^⑤。根据模型(2.1)可以求得防护服最优生产、分配、定价决策。由于在模型(2.1)中效用函数参数(a 和 b 的取值)以及产能提升比例向量的选取由决策者根据实际情况确定,所以在本节我们研究效用函数参数选取以及产能提升比例向

量设置对防护服定价产生的影响。

首先假设产能提升比例向量 $d = (\frac{15}{33}, \frac{10}{33}, \frac{8}{33})^T$, 考虑在不同的效用函数下防护服的定价结果,计算结果如表 1 所示。从表 1 中可以看出,防护服价格对于效用函数中二次项系数 a 较为敏感,而对于一次项系数 b 不敏感。因此在应用中,我们更应该关注效用函数中二次项系数的选取,使之更加符合防护服的实际效用。对于效用函数参数的设置,决策者可以非疫情时期防护服的市场价格为依据,利用数值拟合的方法^[20]给出 a 的估计值。

表 1 不同效用函数下防护服定价策略表

a	b	防护服价格/(元/件)
30	-500	74.3218
30	-200	73.1131
30	-100	73.3456
30	100	73.8459
30	200	72.8163
30	500	72.9776
40	-500	97.4089
40	-200	97.1454
40	-100	97.4300
40	100	97.1195
40	200	97.2290
40	500	97.3273
50	-500	122.2530
50	-200	121.6030
50	-100	122.2860
50	100	122.5090
50	200	121.9770
50	500	121.3900

其次考虑产能提升比例向量的选取对于防护服价格的影响,这里固定效用函数的两个参数 $a = 40$, $b = 100$ 。考虑四种不同类型的产能提升定价方案:极端型、平等型、温和型和差异化型,如表 2 所示。极端型方案对应的提升比例向量为 $d = (\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6})^T$, 这种产能提升定价方案基于的假设是规模大(即产能高)的企业产能提升难度较大,规模小的企

业产能提升难度小,显然这种假设是不合理的。平等型方案对应的提升比例向量为 $d = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$,这种产能提升定价方案基于的假设是所有类型的企业产能提升的难度相同,与企业规模大小无关,显然这种假设也是不合理的。值得注意的是,传统影子价格理论单独考虑每种资源的边际贡献,暗含了平等型产能提升比例的假设。温和型方案对应的产能提升比例向量为 $(15/33, 10/33, 8/33)^T$,这种产能提升定价方案基于的假设是企业产能提升的难度与企业当前的产能水平呈负相关,这种假设是合理的。差异化型方案对应的提升比例向量为 $d = (75/100, 25/100, 15/100)^T$,这种产能提升定价方案基于的假设与温和型相同,但比例之间的差异化更加明显。差异化型产能提升定价方案体现了决策者对于企业的特殊需求,比如在疫情时期,决策者希望国有企业承担更多的社会责任,以减轻中小企业的负担,此时便可以采用差异化型方案。从表2中可以看出,当采用极端型和平等型产能提升定价方案时,防护服价格较高。这是因为小规模企业产能提升难度较大,所耗费的成本更高,进而也导致了防护服价格提升。当采用温和型和差异化型产能提升定价方案时,防护服价格较为合理。当然值得注意的是,产能提升比例的差异并不能设置得过大,否则出现价格低于成本的不合理现象。

表2 四种产能提升方案下防护服定价策略表

产能提升 定价方案	产能提升比例向量	防护服价格 /(元/件)
极端型	$d = (\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6})^T$	200.2010
平等型	$d = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$	133.5090
温和型	$d = (\frac{15}{33}, \frac{10}{33}, \frac{8}{33})^T$	97.1195
差异化型	$d = (\frac{75}{100}, \frac{25}{100}, \frac{15}{100})^T$	60.1155

4 结论

本文针对疫情环境下防护物资市场价格扭曲的现象,构建防护物资最优生产-分配-定价模型,并在此基础上提出广义影子价格的概念和计算方法,以此作为防护物资定价依据,进而通过价格引导企业生产和最终物资的分配,为解决当前最为紧迫的防护物资匮乏的问题提供解决方案。本文得出的结

论如下:

- (1)在疫情背景下防护物资的市场价格扭曲,无法真实反映产品的实际价值,影子价格反映了防护物资客观价值,可以作为定价的依据。
- (2)广义影子价格考虑了企业规模和产能提升成本,相比传统影子价格更适用于为政府管控下的防护物资统一定价。
- (3)按照广义影子价格为防护物资定价,有助于引导企业合理生产,高效地解决防护物资短缺匮乏的问题,实现社会福利最大化。
- (4)效用函数和产能提升比例向量影响防护物资定价,实际应用中应采取科学的方法对其进行合理的估计和设置。本文给出的“温和型”和“差异化型”产能提升定价方案有较好的实际应用价值。

注释:

- ①数据来源于:国家及各地卫生健康委员会每日信息发布。
- ②注:相关资料参考“2020年2月13日国务院联防联控机制发布会”。
- ③注:这里的范数可以任意选取,在本文我们选用向量的 l_1 范数。
- ④注意:由于 v 是凹函数,所以引理1.3中的 $\max$ 变为 $\min$ 。
- ⑤本节对防护服需求量、产能和成本的假设是根据互联网相关资料估计后得出的模拟数据。

参考文献:

- [1] 巩玥,史志祥,陈菁,等. 冠状病毒的研究现状[EB/OL]. (2020-02-25)[2020-02-25]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.4816.Q.20200224.1748.002.html>.
- [2] 刘丁. 新型冠状病毒肺炎疫情期间医院感染管理工作的思考[EB/OL]. (2020-02-20)[2020-02-25]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1097.r.20200220.1117.005.html>.
- [3] 李晔,蔡冉,陆烨. 应对新型冠状病毒肺炎防护服的选择和使用[EB/OL]. (2020-02-21)[2020-02-25]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/43.1390.R.20200219.1436.002.html>.
- [4] 张利. 突发公共卫生事件一级响应下医院接受捐

赠的风险管理和应对[EB/OL]. (2020-02-19) [2020-02-25]. <https://doi.org/10.14055/j.cnki.33-1056/f.20200219.001>.

[5] 陈方若. 大疫当前谈供应链思维, 从“啤酒游戏”说起[EB/OL]. (2020-02-23) [2020-02-25]. http://www.bulletin.cas.cn/zgkxyy/ch/reader/view_news.aspx?id=20200223121216395.

[6] 汪传旭. 基于腐损程度的季节性产品动态定价与订单量的集成优化[J]. 运筹学学报, 2009, 13(4): 71-82.

[7] 连志刚, 朱钊, 管在林, 等. 生产计划中阶梯型价格原料最优配置[J]. 运筹学学报, 2008, 12(4): 62-70.

[8] Bertsekas D P, Nedi A, Ozdaglar A E. Convex Analysis and Optimization[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[9] Beck A. First Order Methods in Optimization[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017.

[10] 任嵩堂. 我国稀缺资源的价值衡量: 社会主义市场经济条件下的影子价格[M]. 北京: 中国物价出版社, 2001.

[11] 周小川. 数学规划与经济分析[M]. 北京: 中国金融出版社, 2019.

[12] Jansen B, et al. Sensitivity analysis in linear programming: just be careful! [J]. European Journal of Opera-

tional Research, 1997, 101(1): 15-28.

[13] Bertsekas D P, Ozdaglar A E. Pseudonormality and a Lagrange multiplier theory for constrained optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2002, 114(2): 287-343.

[14] Tao J, Gao Y. Computing shadow prices with multiple Lagrange multipliers[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2020, DOI:10.3934/Jimo.2020070.

[15] 马赞甫. 线性规划中影子价格的“非唯一性”[J]. 系统工程, 2007, 25(4): 119-122.

[16] Varian H R. Intermediate Microeconomics with Calculus: a Modern Approach[M]. London: WW Norton & Company, 2014.

[17] 岳丹丹. W 服装公司成本控制研究[D]. 天津: 天津师范大学, 2019.

[18] Aucamp D C, Steinberg D I. The computation of shadow prices in linear programming[J]. Journal of the Operational Research Society, 1982, 33(6): 557-565.

[19] Akgül M. A note on shadow prices in linear programming[J]. Journal of the Operational Research Society, 1984, 35(5): 425-431.

[20] 马昌凤, 林伟川. 现代数值计算方法: MATLAB 版[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

Optimal Production and Allocation Strategy of Protective Supplies in the Epidemic Context

Tao Jie Gao Yan

Abstract: The outbreak of the new coronavirus causes the shortage of protective supplies, which increases the risk of infection of medical practitioners. In the epidemic situation, the market prices of the protective suppliers are distorted and cannot be applied. In this paper, we propose a mathematical programming model to guide the production, distribution and pricing mechanism of protective suppliers. Based on the model, we propose the notion of the generalized shadow price which can be used to price the protective suppliers, and further guide the manufactures to optimize their production. The advantage of the generalized shadow price over the traditional ones is that it reflects the cost for manufactures to enhance their production capacities. Furthermore, we build the relationship between the generalized shadow price and the set of Lagrange multipliers, and propose a linear programming model to compute the generalized shadow price. The numerical simulation tests show the practical value of generalized shadow prices in pricing the protective suppliers in the epidemic situation.

Key words: coronavirus; epidemic protection supplier; pricing; shadow price