

【专题：大概念教学】

编者按：新修订的课程标准强调单元学习，而大概念是制定单元目标、设计单元教学的核心。数学大概念能够把多个数学知识、概念联系成一个连贯的整体，具有概括性、迁移性及发展性等特征。本期专题文章探讨了大概念的内涵、如何提炼数学大概念、如何围绕大概念设计教学等问题，希望能对教师朋友们有所启发。

基于大概念落实数学学科的育人价值

——以小学度量教学为例

刘晓萍

【摘要】大概念是一种更高层次的上位概念，是一种更深层次的本质的概念，它蕴含着人与自我、人与自然、人与社会的价值对话，因而能在课堂中以其学科体系与哲学观念承载学科育人的终极目标。度量是小学数学学科中一个适切的大概念，具有四重育人价值——数学抽象、数形结合、数学创造、理性思维。为了让数学育人变成可见的生命成长过程，教师可辅以四个教学策略——求真驱动、整体感知、并置模型、自主冒险。

【关键词】大概念；度量；育人价值；理性思维；数学创造

大概念是一种更高层次的上位概念，是一种更深层次的本质的概念，是学生建构学习图式的认知框架，具有整合作用，并能广泛迁移。大概念这一教育理念可以追溯到怀特海（情性观念）、布鲁姆（基本概念）、布鲁纳（一般概念）和奥苏伯尔（要领概念）等人的教育思想。在我国教育界，引入大概念是大家基于对核心素养教学实践的反思，这能为落实学科育人提供一条新的路径。具体到小学数学学科，史宁中、鲍建生等教授的研究与国外学者一致，认为度量是数学学科中一个适切的大概念，因为度量是一种数学基本思想，具有知识的兼容性与整合性，贯穿于整个数学学习过程，而且度量本身蕴含着人与自我、人与自然、人与社会的价值对话。

一、小学度量教学的育人价值分析

从认识论的角度来看，度量是对事物某个特征、某种属性进行刻画的量，其基础是两点间的距离，由此可以将时间与空间、货币与温度、运动与静止等多个领域的量进行拓展，使其成为具有特定意义的量；从价值论的角度来看，度量是利用测量技术与工具对物理世界和智力世界进行数学表达的过程，它是一种理解世界、解释世界的手段。因此，不少国家的中小学数学课程都将度量和数与运算、代数、统计等内容相提并论。在我国，度量内容则主要集中在“图形与几何”内容领域，分散于单位的认识与换算、角

度、平面图形的周长、平面图形的面积、立体图形的体积、某些实物（如土豆）的体积测量方法等知识点的学习中，主要体现度量的意义、度量的必要性、常见图形度量的基本方法，但这都无法体现“度量是数学的本质”。因此，就需要基于大概念重新定位度量教学的育人价值。

1. 数学抽象。数学抽象是一种核心的数学素养，是一种重大的数学思想，它决定着数学学科的走向，是哲学范畴的数量侧面。任何事物都有质与量两个方面。作为质与量统一体的“度”，就是保持事物本身的、量的限度与幅度。所以说，度量的学习就是帮助学生通过度与量的数学方式积淀抽象思想。度量有着丰富的人文和生活背景，引导学生从多个视角展开学习，能使他们体会到数学概念的真谛，从而形成一种心理学上的概型，也就是学生终身受用的数学抽象素养。

2. 数形结合。数形结合是与一般科学方法相应的数学方法，用于数学思考、刻画世界时能够明显体现学科特点。例如，在“数与代数”内容领域，以1的度量为起点，通过数轴等几何图形将运算律从自然数推广到有理数；在“图形与几何”内容领域，以确定1个度量单位为起点，通过数数的方式对图形的运动、空间进行定量分析。这样教学，能使学生融通“数与代数”和“图形与几何”两个内容领域，使得学生对

数学学习有更上位的理解,同时有助于培养他们的直觉力与洞察力。

3. 数学创造. 人类一直在探索宇宙和大自然的奥秘,并在不断揭秘的过程中提升智力水平。在探索与揭秘时,必然涉及度量工具,并不断挑战提高度量工具精确度的问题。一旦我们用度量来刻画现实与未知,便拥有了一种数学创造工具的能力。这种创造将数形体验与现实世界相连,极其有趣又充满想象。说到底,度量是为了更好地解释有限与无限、近似与精确、离散与连续等数学基本矛盾,是为了描写、表示、反映现实时空,为各种时空观提供数学模型以及反映客观事物的运动规律。用度量打量生活是数学眼光与数学表达的具体体现,是未来公民应具备的必要素养。

4. 理性思维. 度量的学习常常伴随着学生生活经验的激活与再现,常常需要学生经历观察、操作、想象等活动,这些活动也是学生发展空间观念与推理能力的重要途径。学生在统一度量单位、形成度量方法的过程中,在感性认识的基础上进行合理的猜想、比较、分析、综合、概括,这又能促进他们发展理性思维。总之,通过度量学习,学生学会的是基于证据和逻辑来解释世界的方法,进而用理性思维来影响其实践创新,指导其实践探索。

二、学科育人视角下小学度量教学策略

史宁中教授指出:“没有度量就没有数学,度量是人们认识数学,进而认识现实世界的基本工具和表达语言。”笔者认为,教师在度量教学中应当注意:其一,度量是思维的结晶,可以通过数学抽象得到;其二,度量是实践的产物,可以借助工具得到。在具体的小学度量教学中,可以围绕以下几个教学策略来实现学科育人。

1. 求真驱动. 小学生学习事物主要靠概念形象,教学度量就是引导学生用单位去探究真实生活中存在的量,从而完成抽象。在小学阶段,长度是最重要的度量。教学“长度单位”,教师可以先让学生阅读《马屁股的距离》一文,并提问:人们为什么不再用马屁股作为衡量标准?人们最初将“经过巴黎的地球子午线的四千万分之一”定义为1米,为什么要放弃它而重新选择“光在真空中 $\frac{1}{299792458}$ 秒的时间内所行进的距离”来定义?真实的背景资料能极大地驱动学生求真的意愿。如同古人用自身的一拃、一庹、一步来度量长短,借助马屁股来度量长短总能发现

误差,甚至是矛盾,所以终究要寻求更具唯一性的标准。光在真空中某段时间的行程被选择,正是人们逐步求真的结果。其他单位的创立过程与长度单位的创立过程相似,都是通过定性、定量相结合的方式去找寻一个合适的测量标准。这个找寻标准的过程,必然会激发学生用数学的语言去精准表达量的大小的欲望,从而使他们深刻体会建立统一度量单位的重要性,通过“量出量、数出量、数出数”学会数学抽象。与此同时,数学概念越抽象,人们越会追求度量工具的精确度。这样,在理性的帮助下,物理素材将被最大限度地使用。

2. 整体感知. 尽管度量内容几乎贯穿整个小学阶段,但基本没有引导学生发现几何上测量单位与算术上计数单位的一致性,如不断产生更小的测量单位其实就是产生分数单位、小数单位,反之亦然;也没有引导学生在整体上梳理度量是如何发展的。关注面积、体积的计算与应用,却没有形成度量是单位的运算的思想,如长度、面积、体积是累加,速度是长度与时间的比,由此由一个量或几个量的运算就可以度量万物,如可以用身高 $\div$ 体重来度量胖瘦。前文说长度是最重要的度量,就是因为有了1米,便有了1平方米、1立方米的度量概念,在一维上可以1米1米地数,在二维上就可以用边长为1米的正方形去1平方米1平方米地数,在三维上就可以用棱长为1米的正方体去1立方米1立方米地数。如同在线上1米1米地数,在角里可以1度1度地数,在时间轴上可以1时1时地数。因此,度量教学就要启发学生在整体上感知度量是基于数数而得,并因此与计数单位建立关联。具体而言,学生通过学习能感知1米1米地量是1个1个地数,那1分米1分米地量就是0.1个0.1个地数;反之,1千米1千米地量就是以千为单位1个1个地数。1平方米1平方米地量是1个1个地数,那1平方分米1平方分米地量就是0.01个0.01个地数;反之,1公顷1公顷地量就是以万为单位1个1个地数。学生一旦学会整体考量数、运算、度量,就能体悟数形结合的妙处,也能自由而符合逻辑地创造新的数与新的度量。

3. 并置模型. “我们需要对它进行度量,并不是使用诸如直尺、量角器之类的笨拙的现实工具,而是使用我们的头脑。”笔者认为,美国数学家洛克哈特这句名言的意义在于:希望度量教学在帮助学生习得制作、使用度量工具的方法的同时,促进其拓展思维边界,更进一步,可以理解为,基于度量视角的教

学要不断去除现实背景和量纲,将量抽象成数,这样更便于运算,更便于从感性走向理性.要实现这一教学目标,并置模型的教学策略可以一试,如教学“小数的意义”,复习如何表征1后,教师提问:按照这样的思路,0.1怎样表示?0.01呢?待学生回答完毕,教师并置学生的表达,全部呈现于一张课件(如图1).然后,教师再次追问:不同的表达都在说明哪一个数学故事?相较于群组、数轴、面积等模型,钱币等模型更加直观,能更好地阐释数是量的抽象.将这些模型并置在一起,有助于学生理性地思考:以1为度量单位,自然数是以一而十、十而百的方式大起来的,小数是以不断均分10份的方式小起来的.进而明晰:度量工具是以一而十、十而百的创造方式往大数量测量,如百元、千米、吨;度量工具是以不断均分10份的创造方式往更精确的方向测量,而且都是基于1元、1米、1度等单位往大小两个方向延展.在对模型并置后寻找其共同原理的过程中,学生能逐渐产生整体感知,从而在量与数之间自由切换,或者由量推理数,或者由数返回到现实意义.这样教学,能使学生明晰度量工具是度量手段,理性思考是度量目的,但它们是一体两面,通过理性思考会创造出更理想的度量工具,度量工具的发展会促进数学更理想地阐释世界.

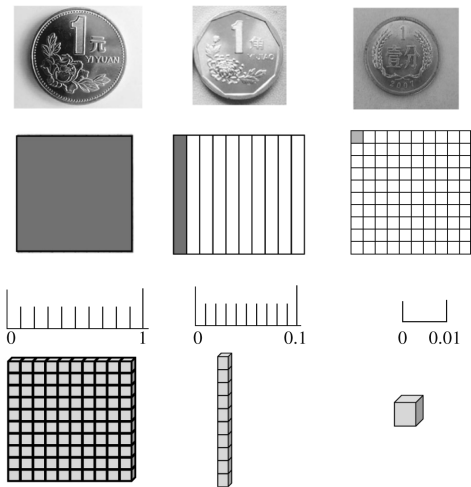


图1

4. 自主冒险. 只有学生自己经历丰富的、深刻的思维冒险,才能建立真正的数学联结,才能让数学能力转化为扎扎实实的数学眼光、数学表达.因此,教师还应注意留足时间供学生自主观察、猜测、想象、归纳、类比.如教学“角的度量”,教师提出问题:同学们通过比较,知道 $\angle A$ 大于 $\angle B$,但 $\angle A$ 到底比 $\angle B$ 大多少呢?学生有的尝试着用线段去表达角张开的

大小,有的去寻找所测量的角与直角的倍数关系,有的试图仿照线段的测量定一个角度基本单位“1”……之后,教师引导学生分析数学冒险的起点、过程、困难与问题解决的矛盾.有的学生基于理性思考周角、平角、直角、 1° 角的比例关系,从而循着“ $360^\circ \rightarrow 180^\circ \rightarrow 90^\circ \rightarrow 1^\circ \rightarrow 10^\circ \rightarrow 100^\circ$ ”的路径,在头脑中创造度量角的方法,其实这就是再创造了量角器.甚至有的学生会思考角度的进率与长度单位的进率不一致,从而追求用十进制进行统一.

上述种种表述,都暗合洛克哈特的洞见:度量是一种很好的哲学训练,我们在头脑中创造完美的虚拟对象,这些对象也有完美的度量尺寸.因此,当以度量为大概概念时,无论是“数与代数”的教学,还是“图形与几何”的学习,其背后无不体现出数学抽象、数形结合、数学创造、理性思维等育人价值.课堂再辅以求真驱动、整体感知、并置模型、自主冒险等教学策略,学生将会始终感受着数学的震撼——智力自由的震撼,理性解释世界的震撼.

参考文献:

- [1]李松林.以大概念为核心的整合性教学[J].课程·教材·教法,2020(10):56-61.
- [2]李刚,吕立杰.学科大概念基本样态与课程角色的比较与分析[J].教育科学研究,2020(9):46-51.
- [3]史宁中.基本概念与运算法则——小学数学教学中的核心问题[M].北京:高等教育出版社,2013.
- [4]赵炯美,鲍建生.中小学数学课程中的一条主线——度量[J].小学教学,2017(10下):8-12.
- [5]鲍建生,周超.数学学习的心理基础与过程[M].上海:上海教育出版社,2009.
- [6]娜仁格日乐,史宁中.度量单位的本质及小学数学教学[J].数学教育学报,2018(6):13-16.
- [7]张奠宙,过伯祥,方均斌.数学方法论稿(修订版)[M].上海:上海教育出版社,2013.
- [8]童心布马.万物有数学:好玩的量与计量[M].北京:北京日报出版社,2019.
- [9]洛克哈特.度量:一首献给数学的情歌[M].王凌云,译.北京:人民邮电出版社,2015.

【作者简介】刘晓萍,江苏省苏州市教育科学研究院数学教研员,高级教师(江苏 苏州 215000).

【原文出处】《江苏教育》:小学教学版(南京),2021.3.22~25.