

基于反比佣金率约束的第一价格和第二价格拍卖模型

赵凤荣 邬俊

【摘 要】通过假定反比佣金率的具体形式,采用贝叶斯-纳什均衡分析,分别得出带有保留价的第一价格和第二价格密封式拍卖中竞拍者的唯一均衡报价策略,并深入分析了反比佣金率的系数与竞拍者的均衡报价及拍卖参与者期望收益之间的关系。研究发现,竞拍者和卖者的期望收益与反比佣金率的系数 k 呈反向变动,拍卖行的期望收益与 k 呈同向变动。通过计算第一价格和第二价格拍卖模型中卖者和拍卖行的期望收益,发现获得的期望收益分别相等,说明著名的收益等价定理在基于反比佣金率约束的两种拍卖机制中仍然成立。进一步分析卖者和拍卖行的期望收益,分别构造出最优保留价和最优反比佣金率系数应该满足的条件,与现有研究文献的结论进行对比分析,说明该反比佣金率的设置及其结论的合理性。

【关键词】反比佣金率;最优保留价;均衡报价;拍卖机制

【作者简介】赵凤荣(1981-),女,内蒙古通辽人,昆明理工大学管理与经济学院博士研究生,内蒙古师范大学计算机科学技术学院讲师(呼和浩特 010022);邬俊(1986-),女,云南昆明人,昆明理工大学管理与经济学院博士研究生,昆明理工大学国际学院讲师(昆明 650093)。

【原文出处】《开发研发》(兰州),2021.3.121~128

【基金项目】国家自然科学基金项目“基于行为运作的生鲜农产品拍卖市场保留价机制组合研究”(71861020)。

自1961年 Vickrey^[1]对拍卖理论进行开创性研究以来,拍卖理论及应用受到广大学者的关注。在市场经济中,作为一种有效的价格均衡及资源配置机制,拍卖不仅在实践中被广泛使用,如艺术品、烟草、皮革、鱼类、花卉和无线电频谱使用权等拍卖活动^[2],其理论也得到了深入研究^[3-4]。最具有代表性的成果有 Riley 和 Samuelson^[5]及 Myerson^[6]建立的收益等价定理,为人们研究标准拍卖机制提供了基准。2020年诺贝尔经济学奖获得者 Wilson 和 Milgrom 曾分别研究了共同价值拍卖和关联价值拍卖,创造性地设计了非同质多物品的同步多轮拍卖机制,推动了拍卖理论向纵深发展^[7]。在应用方面,关于石油、天然气、采矿权和木材采伐权的拍卖实践研究较多^[8-9]。随着电子商务的兴起,网上拍卖风靡全球,主要有国外的 eBay、Amazon、Yahoo、Sotheby 和国内的易趣、阿里、京东等拍卖网站。因此,大量文献对网上拍卖机制进行了深入探究,丰富了拍卖理论研究的内涵,增强了拍卖理论研究的实用价值。

佣金作为一种常见的用于调整竞拍者、卖家和拍卖行之间收益分配的拍卖参数,一些学者对其进行了相关的理论研究。根据经济模型中变量的分类,可以将研究佣金的拍卖文献分为外生佣金率文献和内生佣金率文献两类。

假定佣金率是外生给定的文献主要有,Greenleaf 等^[10]将流拍罚金引入带有佣金的拍卖模型,发现拍卖行采取流拍罚金与较低佣金的组合比仅使用佣金具有帕累托占优,并且该策略鼓励卖者设置较低的保留价,首次将流拍罚金引入到拍卖机制中,但未涉及佣金率的设置问题。Ginsburgh 等^[11]研究了第二价格密封式拍卖中拍卖行分别对买家和卖家收取佣金时均衡报价和相关收益及福利的变化情况,发现较高的佣金率使买卖双方的境况都略有恶化,福利变化方向相同。虽然该文献将佣金与福利关联起来,但仅分析了一种拍卖机制下的佣金收取情况。王彦等^[12]首先研究了在独立私人价值模型和关联价值模型的框架下,第一价格和第二价格拍卖中获胜的竞拍者按成交价的一定比例向拍卖行支付佣金的情况,发现竞拍者的报价与佣金率成反向变动,

但其期望收益与佣金率无关,两种机制中卖者的收益相等,收益等价定理仍然成立。毕志伟等^[13]在前期研究^[12]的基础上进一步研究了关联价值模型下第一价格和第二价格拍卖机制中佣金率对均衡报价和买卖双方收益的影响。虽然这两篇论文将佣金率引入到第一价格和第二价格拍卖机制中,但仅分析了佣金率对拍卖结果的影响,没有将保留价与之结合起来进行分析,也未探讨如何制定一个最佳的佣金率。Wang^[14]进一步研究了第一价格和第二价格密封式拍卖中当佣金率是交易价格的线性函数时,风险中性的竞标者的均衡报价策略,并发现第二种拍卖机制的均衡报价策略是主导策略。但在研究第一价格密封式拍卖机制时,只分析了竞拍者的私人估价服从均匀分布这一特殊情况,因此结论具有一定的局限性。基于此,杨卫星等^[15]将Wang对第一价格拍卖中均衡策略的研究推广到一般分布的情形,并研究了卖者、拍卖行和竞拍者之间的期望收益问题,在一定程度上丰富了Wang的研究,但创新性略显不足。王明喜等^[16]同时分析了第一价格和第二价格拍卖中佣金率和保留价与均衡报价和拍卖参与者期望收益之间的关系,并推导出最优保留价的表达式。这篇论文将研究扩展到第二价格密封式拍卖模型,但没有深入分析最优佣金率的设置。杨卫星等^[17-19]进一步将佣金率具体化,分别研究了佣金率与成交价成反比和线性关系时第一价格和第二价格密封式拍卖模型的报价策略及收益问题,可是均未涉及最优保留价和最优反比佣金率的设置问题。

假定佣金率是内生决定的文献主要有,Rochet等^[20]根据竞拍者人数是外生还是内生将拍卖市场分为单边市场和双边市场,分别探讨了两种市场机制中卖方接受的价格与税收(或佣金)之间的关系。Loertscher等^[21]从理论上证明了当佣金率是内生变量时拍卖行在实际拍卖中使用卖者定价且收取变化很小的线性佣金的原因,并将Myerson的最优机制进行了一定的推广。刘树林等^[22]对传统的第一价格拍卖模型进行了扩展,分析了带有佣金率和保留价时拍卖参与者之间的博弈行为,首次提出最优佣金率及其满足的条件,是国内研究佣金率和保留价的经典之作,为后续研究提供了新思路。冉茂盛等^[23-24]运用博弈理论分别研究了网上一口价拍卖模型中最优一口价、最优佣金率和最优定额佣金的设置问题。其将佣金率应用于使用临时一口价的网上拍卖模型,丰富了佣金率的理论和应用场景。江朝力等^[25]在广义第一价格拍卖机制下研究了互联网广告实时竞价中最优佣金率的设置问题,分析了保留价有无时需求方期望支出与佣金率的关系,进一步扩展了内生佣金率的适用范围,但仅分析了一种拍卖机制。虽然已有学者^[17-18]研究了反比佣金率的存在性及其与拍卖参与者收益之间的关系问题,但对反比佣金率的设置还存在一定的不足,杨卫星^[17-18]分别在对卖者和第二价格拍卖中竞拍者期望收益的推导中遗漏了一些特殊情况,并且均没有分析如何设置最优保留价和最优反比佣金率。另外,据2015年修订的《中华人民共和国拍卖法》第四章拍卖程序第四节佣金中的第五十六条和五十七条规定“收取佣金的比例按照同拍卖成交价成反比的原则确定”^[26],因此研究拍卖机制中反比佣金率的设置具有一定的现实意义和实用价值。

综上,本文假设拍卖行向获胜的竞拍者收取的反比佣金率为 $c = k/b$,采用贝叶斯-纳什均衡分析方法,通过分析第一价格和第二价格拍卖机制中竞拍者的期望收益,从而得到其均衡报价策略,并深入探讨了反比佣金率的系数对竞拍者的均衡报价策略以及拍卖参与者期望收益的影响,证明了对于竞拍者、卖者和拍卖行来说,两种机制是等价的,最后讨论了最优保留价和最优反比佣金率系数的设置问题。完善了现有文献所提出的拍卖模型中反比佣金率不能为零的缺陷,进一步丰富了收益等价定理并构造出最优保留价和最优反比佣金率系数应该满足的条件等内容,同时将所得结论与现有研究文献进行对比,证明了带有反比佣金率的拍卖模型的可行性,为拍卖行如何设置佣金率提供了有力的参考。

一、模型及符号

(一) 模型假设

采用拍卖文献中广泛使用的独立私人价值模型来描述竞拍者、卖者与拍卖行在第一价格和第二价格密封式拍卖机制中的博弈行为。假设拍卖市场中只有一个卖者、一个拍卖行和 n 个潜在的竞拍者,拍卖参与者都是风险中性的,该市场上有一个不可分割的商品待拍卖,竞拍者 i 仅知道自己对拍品的私人估价为 v_i ,且把 v_i 当成一个随机变量,即每个竞拍者都知道待拍品对他个人来说有多少价值,但都无法确切地知晓其他竞拍者的估价。假定竞拍者之间是对称的,所有竞拍者的私人价值在区间 $[\underline{v}, \bar{v}]$ 上独立地服从相同的概率分布函数 $F(v)$, $F(v)$ 递增且可微,可知其满足 $F(\underline{v}) = 0, F(\bar{v}) = 1$ 。假设 $F(v)$ 具有连续的概率密度函数 $f(v) = F'(v)$,

$f(v) > 0$ 且可微, $f(v)$ 在 $[\underline{v}, \bar{v}]$ 上有完全的支撑域。

卖者和拍卖行决定选择第一价格或第二价格密封式拍卖模式进行拍卖, 每个竞拍者根据自己对拍品的私人价值进行报价, 其目标均是实现自身期望收益的最大化。将反比佣金率设置成 $c = k/b$, 其中 $k \geq 0$, b 为竞拍者的报价, 且 $b > 0$ 。拍卖行采取单边佣金制, 只有获胜的竞拍者按成交价的反比佣金率 c 向拍卖行支付佣金。卖者将保留价设置成 r , 且向竞拍者公开, 因此拍品的最低成交价应为 r , 即竞拍者的估价应该满足 $v \geq (1 + k/b)r$, 那么竞拍者参与或不参与拍卖的无差异最低估价 v_* 满足 $b(v_*) = r$, 又因为 $v_* = (1 + k/b(v_*))r$, 所以推出 $v_* = r + k$ 。因为估价低于 v_* 的竞拍者不能获得正的收益, 所以保留价 r 的设置将其排除在外, 这里规定他们的报价为零, 即当 $v < v_*$ 时, $b(v) = 0$, 此时这类竞拍者不参与拍卖。

(二) 符号说明

为了更加清晰地讨论, 表 1 系统总结了文中两种拍卖模型使用的相关符号及其所代表的含义。此外, 笔者使用下标 F 和 S 来区分第一价格和第二价格拍卖中的符号。在整篇文章中, 递减、递增和单调性都是弱意义上的^[27]。

表 1 符号说明

符号	含义
n	参与拍卖的潜在竞拍者人数, $n \geq 2$
v	竞拍者对拍品的私人估价(私人价值), $v \in [\underline{v}, \bar{v}]$
y	余下的 $n - 1$ 个竞拍者的最高估价, 即 $y = \max\{v_j j \neq i, j = 1, 2, \dots, n\}$
$F(v)$	私人价值为 v 时对应的概率分布函数
$f(v)$	私人价值为 v 时对应的概率密度函数
r	拍品的保留价
v_0	拍品流拍后对卖者的残值, 即卖者对拍品设置的一个内在价值
$b(\cdot)$	竞拍者的均衡报价策略, 简记为 b
π	竞拍者获得的期望收益
Π	拍卖行或卖者获得的期望收益

二、均衡报价策略

(一) 第一价格密封式拍卖

在带有反比佣金率和保留价的第一价格密封式拍卖中, 竞拍者基于期望收益最大化决定他们的报价, 其均衡报价策略由定理 1 给出。

定理 1 当反比佣金率为 $c = k/b$ 、保留价为 r 时, 第一价格密封式拍卖中估价为 v 的竞拍者的对称均衡报价策略可以表示为

$$b_F(v) = v - k - \frac{\int_{v_*}^v F^{n-1}(x) dx}{F^{n-1}(v)}, v \geq v_*. \quad (1)$$

其中, $v_* = r + k$, 当 $v \geq v_*$ 时, $b_F(v)$ 是 v 的增函数, 且有 $b_F(v) \leq v$ 。

证明: 根据第一价格密封式拍卖机制, 当某个竞拍者的私人估价为 v , 而报价为 B , 其余竞拍者的报价策略为 $b_F(v)$ 时, 该竞拍者赢得拍品后获得的期望收益可以表示为

$$\pi_F(v, B) = (v - (1 + \frac{k}{B})B) F^{n-1}(b_F^{-1}(B)). \quad (2)$$

在对称的贝叶斯-纳什均衡中, 当 $B = b_F(v)$ 时, 竞拍者获得最大的期望收益, 从而竞拍者的最优报价策略满足以下一阶条件:

$$\frac{\partial \pi_F(v, B)}{\partial B} = -F^{n-1}(v) + (v - B - k)(F^{n-1}(v))'(b_F^{-1}(B))' = 0.$$

由于 $b(v_*) = r$, 对上式简化后求解可得到式(1)。

上面证明了竞拍者选择均衡报价策略的必要条件,充分性的证明方法与王明喜等研究^[16]类似,这里不再论证。因此,在第一价格密封式拍卖机制中,式(1)是竞拍者的贝叶斯-纳什均衡报价策略,也是其最优报价。再对式(1)求 v 的一阶偏导数可知, $b_F(v)$ 是 v 的增函数。

推论 1 在带有反比佣金率 $c = k/b$ 约束的第一价格拍卖机制中,竞拍者的对称均衡报价与保留价 r 呈同向变动,而与反比佣金率系数 k 呈反向变动。

证明:对式(1)分别求 r 和 k 的一阶偏导数,可知前者大于零,后者小于零,因此 $b_F(v)$ 关于 r 递增而关于 k 递减。

经对比发现,当保留价为 0 时,有 $v_* = \underline{v}$,此时退化后的式(1)与王彦等^[12]论文中的式(3)一致;当保留价和反比佣金率均为 0,同样有 $v_* = \underline{v}$,此时退化后的式(1)与 McAfee 等^[28]论文中的式(5)一致。该结论与王明喜等^[16]论文注记 1 中的(a)一致,说明带有反比佣金率约束的第一价格拍卖模型的合理性。

推论 2 在带有反比佣金率 $c = k/b$ 约束的第一价格拍卖机制中,竞拍者的期望收益随保留价 r 和反比佣金率系数 k 的增大而减小,随 r 和 k 的减小而增大,即均呈反向变动。

证明:将式(1)代入式(2)可得竞拍者的期望收益为

$$\pi_F(v, b(v)) = \int_{v_*}^v F^{n-1}(x) dx.$$

其中, $v \geq v_*$ 且 $v_* = r + k$ 。因为在分布函数 F 给定的情况下,当 r 或 k 变大时,使得 v_* 增大,从而使对应的积分区间变小,进而导致 π_F 的值减小,因此竞拍者的期望收益与 r 和 k 均呈反向变动。

推论 1 和 2 的结论分别与刘树林等^[22]论文中定理 1 的(ii)和(iii)及王明喜等^[16]论文中推论 1 和 2 的结论一致,可见,在第一价格密封式拍卖中,无论是佣金率还是某种形式的反比佣金率都会通过影响竞拍者的报价,从而影响竞拍者的期望收益。因此,竞拍者在参加带有反比佣金率和保留价的第一价格密封式拍卖时,其报价不仅低于他对拍品的私人价值,并且要比没有反比佣金率拍卖时的报价还低,这样才能尽可能减少受到的损失。

(二)第二价格密封式拍卖

在没有佣金率和保留价的标准第二价格密封式拍卖中,竞拍者的报价等于其私人估价是弱占优策略^[29]。王彦等^[12]研究得出,在第二价格密封式拍卖中,当拍卖行设置了佣金率 k 时,竞拍者的最佳报价为 $v/(1+k)$,其中 v 为私人估价。王明喜等^[16]给出了在佣金率 c 和保留价 r 同时存在的第二价格密封式拍卖中竞拍者弱占优均衡报价策略的表达式,该表达式与王彦等^[12]论文中的式(11)相同,只不过此时估价 $v \geq v_*$,其中 $v_* = (1+c)r$ 。本文通过设定反比佣金率的具体表达式,探讨其结果与现有文献的异同。

定理 2 当反比佣金率为 $c = k/b$ 、保留价为 r 时,第二价格密封式拍卖中竞拍者的弱占优对称均衡报价策略为

$$b_S(v) = v - k, v \geq v_*. \quad (3)$$

证明:由于对称性,设某个私人估价为 v 的竞拍者对应的报价为 $b_S(t)$,其他竞拍者采用均衡报价策略, y 表示其余 $n-1$ 个竞拍者中的最高估价,则他的期望收益为

$$\pi_S(v, b_S(y)) = (v - v_*)F^{n-1}(V_*) + \int_{v_*}^t [v - (1 + \frac{k}{b_S(y)})b_S(y)] dF^{n-1}(y). \quad (4)$$

显然,当 $t = v$ 时期望收益最大,根据包络定理和一阶条件有

$$\frac{\partial \pi_S}{\partial t} \Big|_{t=v} = [v - b_S(v) - k](F^{n-1}(v))' = 0,$$

解得 $b_S(v) = v - k$ 证毕。

经对比,当 $v_* = \underline{v}$, $k = 0$ 时,退化后的式(3)与 McAfee 等^[28]论文中的结果一致。该结论与王明喜等^[16]文中注记 2 的描述一致,说明本文研究结论的可靠性。

推论 3 在带有反比佣金率 $c = k/b$ 约束的第二价格拍卖机制中,竞拍者的对称均衡报价与保留价 r 和参

与竞拍的人数均无关,而与反比佣金率系数 k 呈反向变动。

证明:由式(3)可知,均衡报价仅由 v 和 k 决定,与 r 和 n 无关,且 k 的一阶偏导数小于零,因此, $b_s(v)$ 关于 k 递减,而与保留价和竞拍者的人数均无关。

从定理2可知,与不带佣金率和保留价的传统拍卖模型相比,带有反比佣金率 $c = k/b$ 的拍卖模型中竞拍者的均衡报价降低。这一结论与直觉相符,因为获胜的竞拍者需要向拍卖行支付佣金,所以竞拍者报价更加谨慎。

推论4 在带有反比佣金率 $c = k/b$ 约束的第二价格拍卖机制中,竞拍者的期望收益随保留价 r 和反比佣金率系数 k 的增大而减小,随 r 和 k 的减小而增大,即均呈反向变动。

证明:将式(3)代入式(4)并化简可得,竞拍者的期望收益为

$$\pi_s(v, b_s(y)) = (v - v_*) F^{n-1}(V_*) + \int_{v_*}^v (v - b_s(y) - k) d F^{n-1}(y) = \int_{v_*}^v F^{n-1}(y) dy.$$

由于 $v \geq v_*$, $v_* = r + k$ 且分布函数 F 已知,所以当 r 或 k 变大时,使得 v_* 增大,从而使积分区间变小,导致 π_s 的值减小,因此竞拍者的期望收益与 r 和 k 均呈反向变动。该结论与推论2一致,说明无论第一价格还是第二价格拍卖,当保留价为 r 、反比佣金率为 $c = k/b$ 时,竞拍者的期望收益与 r 和 k 均呈反向变动。但与王明喜等^[16]论文中推论4的结论不同,因为其只考虑了第二高报价大于等于最低估价 v_* 这一种情况,因而所得结论具有一定的局限性。本文全面考虑了第二价格拍卖可能出现各种情况时竞拍者的期望收益。综上,竞拍者在参加带有反比佣金率和保留价的第二价格密封式拍卖时,报价要低于他对拍品的私人价值,否则会导致期望收益下降甚至为负。

三、期望收益

根据前面推出的竞拍者均衡报价策略,在带有反比佣金率约束的第一价格和第二价格拍卖机制中,当保留价存在时分别计算卖者和拍卖行获得的期望收益,发现收益等价定理仍然成立。

(一) 卖者的期望收益

定理3 在带有反比佣金率 $c = k/b$ 约束的第一价格和第二价格拍卖机制中,当卖家设置的保留价为 r 时,竞拍者分别按照式(1)和(3)报价,卖者获得的期望收益相等,即 $\Pi_F^S = \Pi_S^S$ 。

证明:在第一价格密封式拍卖中,商品流拍后的收益和拍卖成功时的收益共同构成了卖者的期望收益,具体为

$$\Pi_F^S = v_0 F^n(v_*) + \int_{v_*}^{\bar{v}} b_F(v) d F^n(v). \quad (5)$$

将式(1)代入式(6),对括号中的被积函数应用分部积分并化简得

$$\Pi_F^S = v_0 F^n(v_*) - k(1 - F^n(v_*)) + n v_* F^{n-1}(v_*)(1 - F(v_*)) + n(n-1) \int_{v_*}^{\bar{v}} (1 - F(t)) F^{n-2}(t) f(t) t dt. \quad (6)$$

在第二价格密封式拍卖中,商品流拍后的收益、仅有一个竞拍者的估价高于 v_* 时的收益和至少有两个竞拍者的估价高于 v_* 时的收益三部分共同构成了卖者的期望收益,具体表示为

$$\Pi_S^S = v_0 F^n(v_*) + n F^{n-1}(v_*)(1 - F(v_*)) r + n(n-1) \int_{v_*}^{\bar{v}} (1 - F(t)) F^{n-2}(t) f(t) (t - k) dt. \quad (7)$$

式(7)经化简后与式(6)相同,因此 $\Pi_F^S = \Pi_S^S$,定理3证毕。

此结论与杨卫星^[17]论文中的结论不同,虽然其在计算第一价格和第二价格密封式拍卖中卖者的期望收益时,均忽略了商品流拍的情况,但不影响问题的本质;二者结论不同的关键原因是杨卫星研究中^[17]在计算第二价格密封式拍卖中卖者的期望收益时,没有考虑仅有一个竞拍者的估价高于 v^* 的情况,即忽略了式(7)等号右边的第二项。

推论5 在带有反比佣金率 $c = k/b$ 约束的第一价格和第二价格拍卖机制中,当卖者设置的保留价为 r ,拍品成功售出时卖者的期望收益与反比佣金率系数 k 呈反向变动。
<https://www.rdfybk.com/>

证明:由式(5)可知,拍品成功售出时卖者获得的期望收益为该式的最后一项,即 $\int_{v_*}^{\bar{v}} b_F(v) d F^n(v)$,其中

$v_* = r + k$ 。当 k 增加时,积分下限变大,导致积分区间变小,又由推论 1 可知, $b_F(v)$ 随 k 的增大而减小,因此拍品成功售出时卖者获得的期望收益与 k 的变动方向相反。

综上,对于卖者而言,当他一旦确定了商品的保留价,就不必纠结于采用第一价格还是第二价格密封式拍卖,因为基于反比佣金率约束的两种拍卖机制给他带来的期望收益相等,关键是设置一个合理的保留价。

(二) 拍卖行的期望收益

定理 4 在带有反比佣金率 $c = k/b$ 约束的第一价格和第二价格拍卖机制中,当卖家设置的保留价为 r 时,竞拍者分别按照式(1)和(3)报价,拍卖行获得的期望收益相等,即 $\Pi_F^H = \Pi_S^H$ 。

证明:因为只有当商品成功售出时拍卖行才能获得收益,所以在第一价格密封式拍卖中,由式(5)可知,拍卖行的期望收益为等号右侧第二项乘以反比佣金率 k/b ,即为

$$\Pi_F^H = \int_{v_*}^{\bar{v}} \frac{k}{b_F(v)} b_F(v) dF^n(v) = k(1 - F^n(v_*)) \quad (8)$$

同理,在第二价格密封式拍卖中,拍卖行的期望收益为式(7)等号右侧后两项分别乘以对应的反比佣金率 k/r 和 k/b ,即为

$$\Pi_S^H = \frac{k}{r} n F^{n-1}(v_*) (1 - F(v_*)) r + n(n-1) \int_{v_*}^{\bar{v}} \frac{k}{v-k} (1 - F(v)) F^{n-2}(v) f(v) (v-k) dv.$$

$$\text{对上式化简得 } \Pi_S^H = k(1 - F^n(v_*)) \quad (9)$$

因此, $\Pi_F^H = \Pi_S^H$, 定理 4 证毕。

如果仅分析存在保留价的情况,而令反比佣金率为 0 时,退化后的定理 3 和定理 4 就与 Riley 等^[5]论文中命题 1 的结论一致。

推论 6 在带有反比佣金率 $c = k/b$ 约束的第一价格和第二价格拍卖机制中,当卖家设置的保留价为 r 时,拍卖行的期望收益与反比佣金率系数 k 呈同向变动。

证明:对式(8)或式(9)求 k 的一阶偏导数,其结果大于零,所以推论 6 成立。该结论与直觉相符,因为 $c = k/b$,所以 c 随 k 的增加而变大,拍卖行的收益因此而增加,反之亦然。

进一步研究发现:

$$\Pi_F^S + \Pi_F^H = v_0 F^n(v_*) + n v_* F^{n-1}(v_*) (1 - F(v_*)) + n(n-1) \int_{v_*}^{\bar{v}} (1 - F(v)) F^{n-2}(v) f(v) v dv.$$

因此,带有反比佣金率的第一价格密封式拍卖中卖者和拍卖行的收益之和等于不带佣金时卖者的期望收益。同理,带有反比佣金率的第二价格密封式拍卖中卖者和拍卖行的收益之和等于不带佣金时卖者的期望收益。由此可以得出推论 7。

推论 7 在第一价格和第二价格密封式拍卖中,与不带佣金时的收益相比,反比佣金率的设置减少了卖者的期望收益,该部分全部转化为拍卖行的期望收益。

综上所述,定理 3 和定理 4 说明,在带有反比佣金率约束且设置了保留价的第一价格和第二价格拍卖规则中,卖者和拍卖行无论选择哪种拍卖机制,获得的期望收益均相等,即著名的收益等价定理仍然成立。因此,对于卖者和拍卖行来说,不必为选择哪种拍卖方式而困扰,关键是设置恰当的保留价和反比佣金率系数,将商品以合适的价格拍出,尽量避免流拍,从而实现二者的期望收益最大化。

四、最优保留价和最优反比佣金率系数的确定

(一) 最优保留价

卖者如果设置一个较高的保留价可能会使竞拍者产生反感,甚至直接将部分有意向的竞拍者拒之门外;如果设置一个较低的保留价,则对竞拍者的约束性较差,失去了保留价原有的作用,还会给卖者带来一定的损失。因此对于卖者而言,制定一个恰当的保留价显得尤为重要。

假设反比佣金率系数 k 是外生给定的, $\frac{1-F(v)}{f(v)}$ 是 $[v_*, \bar{v}]$ 上的严格减函数,根据卖者的期望收益可以推出最优保留价应满足的条件,如定理 5 所示。

定理 5 基于反比佣金率 $c = k/b$ 约束的第一价格和第二价格密封式拍卖中,卖者设置的最优保留价 r 应满足

$$r = v_0 + \frac{1 - F(v_*)}{f(v_*)}, (\text{其中 } v_* = r + k). \quad (10)$$

证明:根据卖者的期望收益表达式(6),对其求 r 的一阶偏导数,从而得到最优保留价应满足以下一阶条件:

$$\frac{\partial \Pi^s}{\partial r} = n F^{n-1}(v_*) f(v_*) [v_0 + k - v_* + \frac{1 - F(v_*)}{f(v_*)}] = 0. \quad (11)$$

结合 $v_* = r + k$,可以解出式(10)。

上面是最优保留价 r 存在的必要条件,下面证明 r 存在的充分条件。对式(11)进一步求 r 的偏导数,得到

$$\frac{\partial^2 \Pi^s}{\partial r^2} = (n F^{n-1}(v_*) f(v_*))' [v_0 + k - v_* + \frac{1 - F(v_*)}{f(v_*)}] + n F^{n-1}(v_*) f(v_*) [-1 + (\frac{1 - F(v_*)}{f(v_*)})']$$

因为当 r 满足式(10)时该式小于零,所以卖者的期望收益取得极大值,从而说明此时的 r 是卖者的最优保留价。

推论 8 最优保留价 r 随反比佣金率系数 k 的增大而减小,随 k 的减小而增大,即呈反向变动。

证明:对式(10)用隐函数求导方法可得

$$\frac{\partial r}{\partial k} = (\frac{1 - F(v_*)}{f(v_*)})' / [1 - (\frac{1 - F(v_*)}{f(v_*)})'] < 0.$$

因此, r 与 k 的变动方向相反。

推论 9 最优保留价 r 随商品流拍价值 v_0 的增大而增大,随 v_0 的减小而减小,即呈同向变动。

证明:与推论 8 的证明类似,对式(10)用隐函数求导方法可得

$$\frac{\partial r}{\partial v_0} = 1 / [1 - (\frac{1 - F(v_*)}{f(v_*)})'] > 0.$$

因此, r 与 v_0 的变动方向相同。推论 9 的结论与实际相符,对于卖者来说,当拍品的私人价值较高时,他自然会制定一个较高的保留价,反之则制定较低的保留价。

(二) 最优反比佣金率系数

通常佣金问题由拍卖行决定,如果拍卖行设置的反比佣金率过高,可能会影响竞拍者和卖者的积极性,甚至导致竞拍者恶意降低报价;如果设置的反比佣金率过低,则对竞拍者的约束性较差,降低拍卖行的期望收益。因此,制定一个恰当的反比佣金率显得尤为重要。

假设卖者的保留价 r 是外生给定的,根据拍卖行的期望收益可以推出最优反比佣金率系数 k 应满足的条件,如定理 6 所示。

定理 6 基于反比佣金率 $c = k/b$ 约束的第一价格和第二价格密封式拍卖中,拍卖行设置的最优反比佣金率系数 k 应同时满足

$$k = \frac{1 - F^n(v_*)}{n F^{n-1}(v_*) f(v_*)}, \quad (12)$$

$$\text{和 } f'(v_*) > -\frac{(n-1)f^2(v_*)}{F(v_*)}. \quad (13)$$

证明:根据式(8)或式(9),对其求 k 的一阶偏导数,从而得到最优反比佣金率系数 k 应满足以下一阶条件:

$$\frac{\partial \Pi^H}{\partial k} = 1 - F^n(v_*) - k n F^{n-1}(v_*) f(v_*) = 0.$$

于是,可以解出式(12)。

上面是 k 存在的必要条件,下面证明 k 存在的充分条件。对上式进一步求 k 的偏导数,化简后得

$$\frac{\partial^2 \Pi^H}{\partial k^2} = -2n F^{n-1}(v_*) f(v_*) - kn(n-1) F^{n-2}(v_*) f(v_*) [f(v_*) + \frac{F(v_*) f'(v_*)}{(n-1) f(v_*)}].$$

显然,当式(13)成立时上式小于零。

因此,当 k 同时满足定理 6 中的两个条件时,拍卖行的期望收益取得极大值,从而说明此时的 k 是拍卖行的最优反比佣金率系数。

五、算例验证

为了说明本文设置的反比佣金率的可实施性和所得结论的正确性,下面通过一个数值算例来验证。假设拍卖市场上只有一个卖者、一个拍卖行和两个竞拍者竞拍一件不可分割的拍品,即 $n=2$,商品流拍后的残值 $v_0=0.15$,竞拍者对拍品的私人估价 $v \sim U[0,1]$,根据概率论知识可得 $F(v)=v$,对应的概率密度函数为 $f(v)=1$ 。为了简化所研究的问题,不考虑拍品的生产成本。当给定 $r=0.3$ 时,根据式(12)可以求出 $k=0.386$,该值满足式(13),可见 0.386 是最优的反比佣金率系数,因此定理 6 是可行的。此时带有反比佣金率约束的第一价格和第二价格拍卖机制中均衡报价和期望收益的结果如图 1 所示。

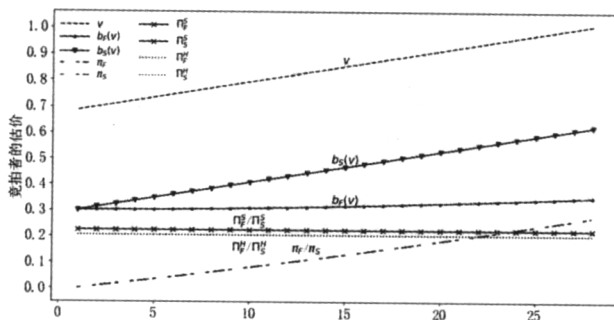


图 1 两种机制下均衡报价和期望收益的比较

注:两种机制中,竞拍者获得的期望收益 π_f 线与 π_s 线重合,卖者获得的期望收益 Π_f^s 线与 Π_s^s 线重合,拍卖行的期望收益 Π_f^H 线和 Π_s^H 线重合。

由图 1 可知,当根据给定的保留价确定出最优反比佣金率系数后,除竞拍者的最高估价等于最低估价 v_0 。这种特殊情况外,第一价格密封式拍卖模式中获胜的竞拍者的均衡报价明显低于第二价格密封式拍卖时的均衡报价,即 $b_f(v) < b_s(v)$,但期望收益等于第二价格拍卖时获得的期望收益,即 $\pi_f = \pi_s$,说明竞拍者不用在意卖家和拍卖行采用第一价格还是第二价格密封式拍卖机制;对于卖家和拍卖行而言,两种机制下的期望收益相等,所以选择哪种拍卖机制均可,关键是确定一个合适的保留价和反比佣金率。因此,根据本文设置的反比佣金率 $c=k/b$ 可以得出相应的定理及推论。

六、结论与展望

结合我国拍卖法律对佣金率的规定,改进现有文献中反比佣金率设置的不足,完善其部分推导缺陷,并给出了最优保留价和最优反比佣金率系数应满足的条件,使带有反比佣金率的拍卖模型更加符合实际。通过对竞拍者、卖者和拍卖行之间的博弈行为进行分析,得到如下结论:(1)竞拍者在两种拍卖模式中均存在贝叶斯-纳什均衡报价策略,且均衡报价都低于获胜者的真实估价,说明由于反比佣金率和保留价的存在,竞拍者的报价更加谨慎。尤其是参加第一种拍卖时,竞拍者的报价要更低,否则会导致收益下降甚至为负。(2)竞拍者的期望收益与保留价 r 和反比佣金率的系数 k 均呈反向变动,表明 r 和 k 对竞拍者有消极作用,因此卖者和拍卖行应该设置合理的保留价和反比佣金率系数,从而激励竞拍者参与拍卖。(3)经比较分析发现,在具有反比佣金率约束的第一价格和第二价格拍卖模式中卖者和拍卖行获得的期望收益分别相等,说明在同时考虑反比佣金率和保留价时著名的收益等价定理仍然成立。因此,对于卖者和拍卖行来说,不必纠结于采用何种拍卖形式,因为两种拍卖形式给他们带来的期望收益是相等的。(4)通过分别对卖者和拍卖行的期望收益求 r 和 k 的偏导数,得到最优保留价和最优反比佣金率系数应该满足的条件;进一步研究还发现最优保留价与反比佣金率的系数呈反向变动,而与商品的流拍价值呈同向变动。因此,卖者一方面应合理估计拍品的私人价值,另一方

面应与拍卖行共同协商确定出最优的保留价和反比佣金率,避免商品流拍,从而实现双赢。

本文通过具体算例验证了上述结论的正确性,但研究还存在一定的局限性,以下问题需要深入探讨:进一步丰富反比佣金率的表示形式、优化结论使其在其他拍卖机制中具有可移植性和健壮性以及拓展最优保留价和最优佣金率的研究空间。

参考文献:

- [1] Vickrey W. Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders[J]. Journal of Finance, 1961, 16(1): 8-37.
- [2] Milgrom P. Putting Auction Theory to Work[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 1-3, 187.
- [3] Wilson R. A Bidding Model of Perfect Competition[J]. The Review of Economic Studies, 1977, 44(3): 511-518.
- [4] Greenleaf E A, Rao A G, Sinha A R. Guarantees in Auctions: The Auction House as Negotiator and Managerial Decision Maker[J]. Management Science, 1993, 39(9): 1130-1145.
- [5] Riley J G, Samuelson W F. Optimal Auctions[J]. The American Economic Review, 1981, 71(3): 381-392.
- [6] Myerson R B. Optimal Auction Design[J]. Mathematics of Operations Research, 1981, 6(1): 58-73.
- [7] 李宝良, 郭其友. 拍卖市场设计的理论发展与新拍卖形式的创新: 2020 年度诺贝尔经济学奖得主主要经济理论贡献述评[J]. 外国经济与管理, 2020, 42(11): 140-152.
- [8] Baldwin L H, Marshall R, Richard J F. Bidder Collusion at Forest Service Timber Sales[J]. Journal of Political Economy, 1997, 105(4): 657-699.
- [9] Hendricks K, Porter R H, Wilson C A. Auctions for Oil and Gas Leases with an Informed Bidder and a Random Reservation Price[J]. Econometrica, 1994, 62(6): 1415-1444.
- [10] Greenleaf E A, Sinha A R. Combining Buy-In Penalties with Commissions at Auction Houses[J]. Management Science, 1996, 42(4): 529-540.
- [11] Ginsburgh V, Legros P, Sahuguet N. On the Incidence of Commissions in Auction Markets[J]. International Journal of Industrial Organization, 2010, 28(6): 639-644.
- [12] 王彦, 毕志伟, 李楚霖. 佣金收取对拍卖结果的影响[J]. 管理科学学报, 2004, 7(4): 45-48.
- [13] 毕志伟, 王彦. 考虑佣金的关联价值拍卖模型[J]. 管理科学学报, 2005, 8(3): 24-27.
- [14] Wang Y. Commission Strategy of the Auction House[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2006, 11(3): 507-510.
- [15] 杨卫星, 刘树林. 带有线性佣金率的密闭式拍卖模型研究[J]. 统计与决策, 2011(13): 35-38.
- [16] 王明喜, 刘树林, 汪寿阳. 带佣金率和保留价的一级和二级价格拍卖[J]. 管理评论, 2012, 24(3): 24-32.
- [17] 杨卫星. 带有反比佣金率和保留价的拍卖模型研究[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2017, 44(6): 106-110.
- [18] 杨卫星, 程禹铭. 带有一种新佣金率的拍卖模型[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2020, 47(1): 118-123.
- [19] 杨卫星. 考虑线性佣金率和保留价的拍卖模型[J]. 经济师, 2020(2): 122-124.
- [20] Rochet J C, Tirole J. Two-sided Markets: A Progress Report[J]. RAND Journal of Economics, 2006, 37(3): 645-667.
- [21] Loertscher S, Niedermayer A. When is Seller Price Setting with Linear Fees Optimal for Intermediaries? [R]. Department of Economics - Working Papers Series, The University of Melbourne, 2007.
- [22] 刘树林, 杨卫星. 第一价格密封拍卖中的最优保留价和最优佣金率研究[J]. 经济研究, 2011, 46(11): 145-156.
- [23] 冉茂盛, 黄俊, 李文洲. 考虑佣金率的一口价拍卖模型[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(9): 2276-2283.
- [24] 冉茂盛, 黄俊, 蒋卫艳. 考虑定额佣金的一口价拍卖模型[J]. 系统工程学报, 2016, 31(6): 750-760.
- [25] 江朝力, 聂雅, 索贵彬. 实时竞价中的佣金率问题研究[J]. 西安电子科技大学学报(社会科学版), 2019, 29(3): 77-86.
- [26] 中国人大网. 中华人民共和国拍卖法[EB/OL]. (2015-07-03)[2021-01-22]. http://www.npc.gov.cn/wxzl/gongbao/2015-07/03/content_1942877.htm.
- [27] 李湘湘. 互联网背景下的两类酒店客房超售模型及数值算法[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2019.
- [28] McAfee R P, McMillan J. Auctions and Bidding[J]. Journal of Economic Literature, 1987, 25(2): 699-738.
- [29] Krishna V. Auction Theory[M]. London: Academic Press, 2002: 15-16.