

初中代数学习中发展学生推理能力的 着力点分析与建议

江守福 章 飞 顾继玲

【摘要】从一线实践和教学研究看,对于初中阶段代数领域发展学生推理能力的研究很少.文章梳理了代数领域发展学生推理能力的具体着力点,分析了代数领域学生推理能力发展的现状.据此,研究者提出发展学生推理能力的建议:外显推理过程,让推理的过程“看得见”;设计推理任务,让推理的目标“能达成”.

【关键词】推理能力;代数;着力点

推理是数学的基本思维方式,为此,《义务教育数学课程标准(2011年版)》要求^[1],推理能力的发展应贯穿在整个数学学习过程中,并在教材编写建议中指出^{[1]65},无论是“数与代数”“图形与几何”还是“统计与概率”的内容编排中,都要尽可能地为学生提供观察、操作、归纳、类比、猜测、证明的机会,发展学生的推理能力.但,高中教师反映,初中生代数领域的推理能力难以应对高中阶段代数学习的要求.这固然更多的是由于初中有关代数运算学习要求与高中衔接不够所致,但在现有的课程框架下,也有必要重新审视初中代数教学中是否切实重视了学生的推理能力发展.而从一线实践和教学研究看,对于初中阶段代数领域发展学生推理能力的研究确实很少.为此,有必要再次梳理代数领域发展学生推理能力的具体着力点,分析教材编写和教学中如何外显数学推理,从而更好地指导一线教师在代数领域加强数学推理的教学.

一、代数领域推理能力发展的着力点分析

推理分为演绎推理和合情推理(包括归纳、类比、统计推断等).演绎是从一般到特殊的推理,归纳是从特殊到一般的推理,类比则是特殊的具体到另一个具有某种类似特殊性的具体.因此,代数里面的推理也包括演绎推理、归纳推理和类比推理.例如,从若干运算结果中归纳出有关运算规律,就是归纳;根据运算法则推演出运算的规律或者公式,就是演绎;而根据有理数的运算法则得到无理数的运算法则、实数

的运算法则等就是类比.

分析代数领域推理能力发展的着力点,需要分析整个代数学习的结构.代数的学习内容,大致是这样一个二维的结构(如下页图1).对于一个具体的研究对象(如有理数、实数、整式、分式、方程等),纵向上大致依次研究三个方面的问题:概念、运算(包括运算法则、运算规律或公式等)、应用.横向上,则从一个对象的研究拓广到另一个对象的研究,如从有理数到实数的延拓、从数到式的延拓、从式到“式与式之间关系”(函数、方程、不等式)的延拓.整个初中阶段的代数学习就是这样,从现实背景出发,按纵、横两个方向生长,教科书也是基本按照这样的逻辑生长起来的.图中以序号①-⑦表示了不同的知识生长过程.下面分别分析这些生长过程中蕴含的数学推理.

①基于现实抽象代数概念,具体过程如下:从现实中抽象出有关概念的若干原型,接着对这些原型进行归纳,归纳其共性,最终概括出概念及其定义.例如,通过现实抽象出若干具体的一元二次方程,接着归纳这些方程的共同特征:含有一个未知数的整式方程,未知数的最高次数是二次,进而概括出一元二次方程的概念:形如 $ax^2 + bx + c = 0$ 这样含有一个未知数且未知数的最高次数是二次的整式方程.其中对若干原型共性的归纳过程,具有归纳推理的成分.

②在代数概念的基础上建立该概念相关的运算法则,常见的作法也是从现实背景中抽取若干算式,根据算式归纳法则.例如,有理数的运算法则,可能是

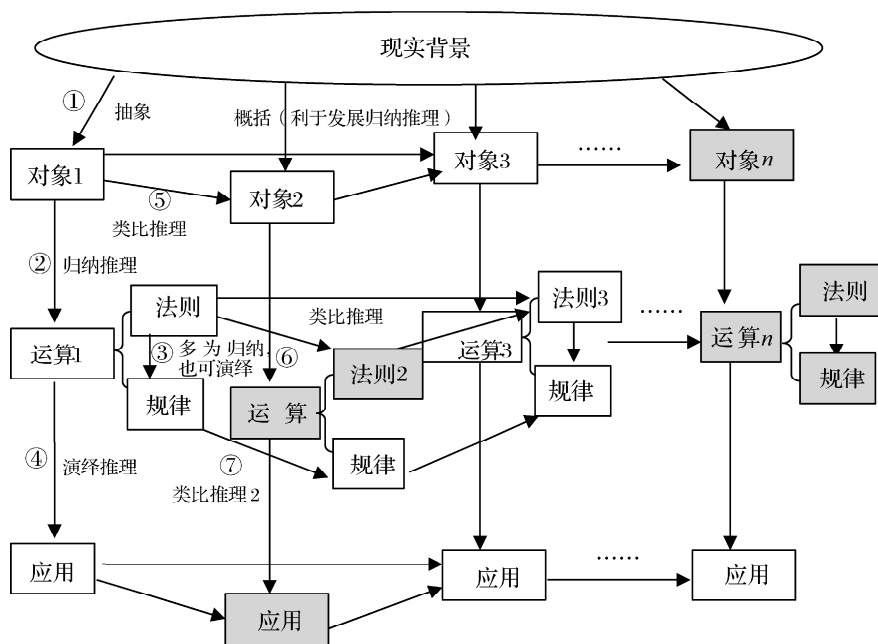


图1 代数知识的生长示意图

从生活背景中两个相反方向的连续运动得到若干算式,并根据现实意义得到算式的结果,基于这些结果归纳运算法则,当然,归纳完毕,还可进一步进行有关生活的解释.总体而言这个过程中,多为归纳推理.

③基于运算规律探析运算规律或者运算公式.这里可能两条思路.一是,完全基于法则进行推演,如基于多项式乘法法则推演乘法公式,这里侧重的是演绎推理;二是,基于具体算式的归纳,通过对若干具体算式计算之后的观察归纳出有关公式,这里侧重的是归纳推理.

④利用有关法则、规律或公式进行运算进而解决问题,这是标准的演绎推理.例如,已知整式乘法的平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,计算 $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$,常规的计算过程是 $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2$,可能有人感觉“不就是带入公式吗,看不出演绎的成分”.实际上,这是一个标准的演绎推理过程.推演的程序如下:因为 $a=2, b=\sqrt{3}$,根据 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ (大前提),所以 $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2$.这个过程与几何中三段式推理过程完全一致,是典型的演绎推理,只是将推演的过程略去了.

上述①-④,反映了代数对象的纵向生长,但,日常教学中常有前期类似的学习经验,因此,代数学习中常可能产生横向的类比推广,例如从有理数的概念

延拓到实数的概念,从有理数加法法则延拓到实数的加法法则,从有理数的运算律(如交换律、结合律)延拓到实数的运算律,这就是⑤⑥⑦.⑤⑥⑦的学习多为类比延拓,侧重的是类比推理.如由正数加法法则到有理数加法法则,原来参与运算的数是正数,现在延拓到了负数,自然正数部分的运算法则要保持一致,正数加正数仍是正数,还是按照原来的法则,结果变大;类似地,可以类比,负数加上负数,应该仍是负的,而且负得更多,结合现实情境,可以类比得出它们的绝对值相加;负数与正数,那自然可以适当抵消.再如,有理数运算到实数运算,对于初中生而言,没有必要也没有可能详细介绍实数运算法则的探究推理过程,教学中一般直接点出可以类比得到:实数与有理数一样,可以进行加、减、乘、除、乘方运算,而且有理数的运算法则与运算律对实数仍然适用.

综上,初中代数学习中,归纳推理主要体现在①②③三个环节,类比推理主要体现在⑤⑥⑦三个环节,演绎推理主要体现在④这一环节,部分学习对象的③这一环节也可体现演绎推理.

二、代数领域推理能力发展的现状分析

(一)演绎推理过程简略,师生难能体会

正如上述分析,代数领域的演绎推理主要体现在运算的应用环节,应该说,这本是代数学习中十分重要的环节,在代数学习中占有很大的篇幅.但与一线教师的交流表明,师生并未感受到其中丰富的演绎推

理. 这一方面是由于师生多将运算过程简单地等同于代入公式或利用法则运算, 并没有把其视为演绎推理的过程. 当然, 深层次的原因是, 教材设计和教学实施中, 全部采用了简化的过程, 师生难能体会到其中的演绎推理.

(二) 合情推理素材丰富, 但明确性不够

正如上述分析, 归纳、类比等合情推理体现在上图中①②③⑤⑥⑦这些环节, 显然, 合情推理在代数学习中同样占据了较大的篇幅, 特别是运算法则和运算规律的探究环节, 但很多地方对于合情推理的过程体现尚显不够, 很多地方多直接点明“类似地, $\times \times \times$ 同样具有 $\times \times \times$ 性质”, 而缺少较为充分的探析过程.

(三) 合情推理与演绎推理的融合不够

一个严格的推理过程, 一般应包括从合情到演绎的全过程. 但教材设计和教学实施中, 这一闭环并未形成. 很多法则、公式的探究仅仅停留在合情推理的层面, 在归纳、类比得到有关法则、规律之后没有进行较为严格的演绎推理. 诚然, 部分法则、规律(如实数的运算法则和运算规律)的严格证明确实超出了初中生的学力水平, 教学中可以适度滑过, 但即便如此, 也可以具体案例的解释和验证使得学生形成更为丰富的体验; 另外, 也有不少法则、规律的严格证明, 并未超出学生的学力水平, 但教材设计和教学实施中, 并未进一步引导学生开展相关演绎推理活动.

(四) 未将推理能力发展作为明确的目标

教材设计和教学实施中, 多将推理作为知识学习的具体工具, 通过归纳、类比等得到代数的运算法则、运算规律, 通过演绎等进行代数运算, 但代数学习中, 很少有例习题专门训练或考查学生推理能力的发展.

三、代数领域加强推理能力发展的建议

(一) 外显推理过程, 让推理的过程“看得见”

很多师生未能很好地“感受到”代数学习过程中的推理, 部分原因是教材设计和教学实施中, 代数推理的过程展开不够. 为此, 需要将代数学习中的推理过程更好地展现出来, 让推理过程“看得见”. 具体地, 让忽略的、压缩掉的推理过程恢复过来, 让不完整的推理过程恢复完整. 下面仅以演绎推理过程的外显化和推理闭环的外显为例加以说明.

演绎推理过程的外显化 学生能很好地感受几何学习中的演绎推理, 因为, 几何学习中很清楚地给出了三段论式的演绎推理过程, 而代数中没有给出三段论式的演绎推理过程. 当然, 如果所有代数运算中都完整地展现三段论式的演绎推理过程, 过程较为拖沓, 师生难免厌烦, 而且算式也不连贯. 面对这个两难境地, 可以适度简化. 实际上, 几何学习中, 三段论式的演绎推理过程也做了一些简化. 完整的三段论式的推理模式是: 大前提, 小前提, 小结论; 这里的大前提实际上就是依据的原理、公理、定理等. 但随着学习的深入, 新学习的定理(大前提)已经深入人心, 要求每次写出大前提作为依据, 学生难免厌烦, 而且易于形成思维阻隔现象, 因此, 几何学习中, 仅仅在新学习一个定理时, 要求将这一定理作为证明的依据写出, 后面会逐步删去这个大前提. 考虑到删去大前提前后的推理表达形式的一致性, 数学教育工作者“创造性”地将大前提放到括号中, 为后续删减提供了便利. 也就是说, 几何演绎推理形式的演变如图 2. 类似地, 代数运算中, 也可以采用类似的做法: 新学一个运算法则或运算规律, 利用它们进行运算时, 要求学生说明道理, 即每个等号一行, 在每一行算式后面标注理由, 等学生熟悉之后, 不再作出类似要求. 这样做, 并没有增加学生太多的负担(仅在新法则运用的初始阶段, 而且对于解方程而言仅仅是在初次学习时在每行等式后面标注理由), 而将重心放到帮助学生理解和尽快熟悉新学习的有关法则、规律上, 更重要的是, 让学生充分感受到代数推理的严谨性, 养成学生言之有据的习惯.

根据大前提	$\therefore$ 小前提	$\therefore$ 小前提
$\therefore$ 小前提	$\therefore$ 小结论(大前提)	$\therefore$ 小结论
$\therefore$ 小结论		
①规范形式	②新学习时的形式 $\rightarrow$ ③常态形式	

图 2 几何推理形式的演变

合情推理与演绎推理融合 下页图 3 是某版本教科书中关于根式乘法的探究过程, 该设计, 先从若干具体数的运算引发猜想, 进而借助计算器计算更多的算式验证猜想, 这是一个很充分的归纳推理的过程. 当然, 考虑到学习时间等多方面的因素, 教科书没有再行进行严格的演绎推理. 实际上, 这一演绎推理过程应该能为学生所接受, 教学中可引导学生进行相关推理, 如可引导学生思考: 你能利用实数的运算法

则和运算律(交换律、结合律等)说明 $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ 吗?(提示:如何说明带根号的两个正数相等).相信,学生借助乘法的交换律、结合律可以说明这两个正数的平方相等,因而它们相等.这样,就很好地实现了从合情推理到演绎推理的完整过程.一般地,在学生学力许可的情况下,应尽力补全合情推理之后的演绎推理过程,让学生经历从合情推理到演绎推理的闭环,养成严谨的思维习惯.即使学力不允许进行严格证明,也应注意通过举例等方式对合情推理的结论予以进一步解释,通过其他知识的适度类比等方式加深学生的理解.



做一做

(1) 计算下列各式,你能得到什么猜想?

$$\sqrt{4 \times 9} = \underline{\quad}, \sqrt{4} \times \sqrt{9} = \underline{\quad}; \sqrt{\frac{4}{9}} = \underline{\quad}, \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \underline{\quad};$$

$$\sqrt{\frac{25}{49}} = \underline{\quad}, \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \underline{\quad}.$$

(2) 根据上面的猜想,估计下面每组两个式子是否相等,借助计算器验证,并与同伴进行交流.

$$\sqrt{6 \times 7} \text{ 与 } \sqrt{6} \times \sqrt{7}, \sqrt{\frac{6}{7}} \text{ 与 } \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}.$$



$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0), \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0).$$

积的算术平方根,等于_____;

商的算术平方根,等于_____.

图3 某教科书中根式乘法探析过程

(二) 设计推理任务,让推理的目标“能达成”

推理不仅是学习的手段、工具,更是学生发展的目标.代数学习过程中,学生在运用推理的过程中,顺带发展了推理能力,但仍需要进行专门的推理训练,通过更为丰富的推理活动发展学生的推理能力.建议,设计更有针对性的推理任务,确保推理目标的达成.这样的任务是多样的,可以是明确要求的归纳、类比或证明活动,也可以是对有关推理过程的判断、辨析、完善与改进等.例如,设计一个具体的活动,要求学生在活动中经历归纳、猜想与证明的过程,切实感受推理的全过程;再如,可以呈现一些推理的过程(如解方程、解不等式或者其他运算的过程),要求学生判断这样的推理过程是否正确并加以完善、改进.兹举几例,与同行交流.

例1 (1) 尝试用分数表示各分数的和(略).

(2) 根据(1)的结果,有人说“两个有理数的和还是一个有理数”,你认为这个说法正确吗,请给出你

的证明.

(3) 一个有理数与一个无理数的和,是有理数还是无理数?

(4) * 两个无理数的和一定是无理数吗? (* 为选做题,根据学生学力灵活处理)

(5) * 关于两个数(有理数或者无理数)的积,你有哪些猜想,你能证明你的猜想吗?

例2 下列解方程的过程是否正确(略)? 正确的说明每一步的依据,错误的加以改正.

例3 如图4,8个相同的直角三角形和一个正方形组成了一个大正方形.

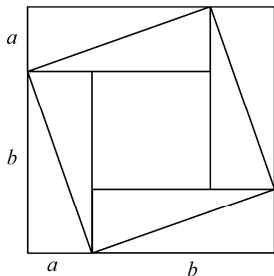


图4 某教科书中根式乘法探析过程

(1) 不进行计算,仅观察图形,说说 $(a+b)^2 - (a-b)^2$ 的结果和理由.

(2) 用代数方法证明(1)中发现的结论.

总之,推理能力的发展,同样是初中代数学习的重要目标.为此,在教材编写和教学设计中,应认真梳理代数学习中发展学生推理能力的着力点,审视代数教学中发展学生推理能力的薄弱环节,通过外显推理过程和明确的推理任务等多种方式,切实发展学生的推理能力.

参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2012.

【作者简介】江守福,青岛市教育科学研究院(266023);章飞,江苏第二师范学院科研处(211200);顾继玲,南京师范大学教师教育学院(210079).

【原文出处】《数学通报》(京),2021.11.21~24