【学科视点】

指向大概念生成与层级转化的学习进阶研究

丁　锐　　金轩竹　　魏巧鹤

【摘　要】由于知识的爆炸性增长和对学生学习过程的关注,大概念学习进阶研究备受推崇.根据关注点的差异,学习进阶研究可以分为标志性研究和转化性研究,而后者常常被忽视.通过对学生学习过程的分析,研究者们提出图式理论、重组理论以及活动效果关系反思理论来解释学习进阶层级转化的过程.指向大概念构建与层级转化的学习进阶模型可以通过验证与演进相结合的方式来构建,模型构建的核心任务是探寻大概念生成的认知根基和认知发展轨迹,并通过设计实验来检验进阶层级及层级转化方法的有效性.研究者们还通过开发融合学习轨迹—课程资源—诊断评价为一体的学习资源库、促进概念生成和转化的教学辅助工具以及更具精度的进阶模型和诊断工具来全方位促进学生大概念的生成与转化.

【关键词】大概念;学习进阶;标志性学习进阶;转化性学习进阶;层级转化

一、学习进阶的内涵、特征与类型

近年来,随着知识的爆炸式增长以及对学生学习过程和差异的关注使得部分国家积极寻求教育系统与研究团队的合作,其中,刻画学生大概念(Big Ideas)发展过程与路径的学习进阶(Learning Progressions,LPs)/假设性学习轨迹(Hypothesized Learning Trajectories,HLTs或LTs)日益成为课程改革中的基础性工作与研究焦点.

学习进阶研究主要起源于数学和科学领域.西蒙(Simon)于1995年通过对自己的教学过程进行分析与反思,提出了"数学教学环"模型,将教师知识、假设性学习轨迹与对学生知识的评估作为教师组织教学的三个重要方面[1].西蒙认为,假设性学习轨迹是教师对学生在课堂活动下可能的思维与理解发展路径的预测,由教学目标、学习活动的计划以及教师对学习过程的假设三个方面构成.2005年,美国国家研究理事会将学习进阶写进了科学课程标准,学习进阶"是对学生连贯且逐渐深入的思维方式的描述.在较大的时间跨度内,学生学习和研究某一主题时,这些思维方式依次进阶"[2],学习进阶之所以如此受到重视,是由于其能够将课程标准、大规模测评和班内检测、教材和教师专业发展联结起来[3].

无论是起始于数学学科的学习轨迹研究,还是来自科学领域的学习进阶研究,两者对学习进阶①都有以下共识:首先,学习进阶是对学习本质的认识.学习不再被视为简单的知识累加过程,而是被视为一段时间内发生的学生思维和理解能力持久性改变的过程.其次,学习进阶不是学科知识的逻辑结构和顺序,而是基于学生经验的实证模型,一种预期的假设,是不断演进与发展的.再次,学习进阶并非"空中楼阁",而是与大概念紧密相连的,其或是围绕某个具体的学科核心概念(如,力、函数),或者指向跨学科概念(如,模型)或关键能力(科学论证)等.最后,学习进阶与皮亚杰认知发展阶段中描述阶段间的过渡理论不同.学习进阶研究者们都相信,当给学生提供某些按照顺序安排的基于前知识的任务或者工具时,学生会表现出某些可以预测的行为,包括对任务的反应以及对他们推理过程的特定解释等[4].因此,它不是教学的处方或者规则,而是一种指导、资源和显示器,用以帮助教师基于学生的思维发展来促进学生建立更复杂的概念[5].总而言之,学习进阶是建立在这样一种假设的基础上:(1)每个人的学习过程虽具有不同的特点,但都有一定规律可循,且大部分学生的学习路径是类似的;(2)设计合适的评估项目可以对学生在学习过程中所处的位置进行诊断;(3)基于学生所处的水平开展恰当的教学活动可以促进学生思维向预期的方向发展.

撒冷(Tzur)基于学习进阶研究者的关注点的不同,将现有的学习进阶研究分为两类,分别是以识别与划分进阶过程中标志性节点/进阶层级(Landmark)为主的标志性研究(Markers Study)和关注概念从低级到高级的发展过程的转化性研究(Shift Study)[6].在标志性学习进阶研究中,研究者关注的核心是如何确定某个核心概念的学习进阶层级,如何检验模型是否有效以及如何应用进阶进行教学等.因此,大多数标志性学习进阶研究都遵循着通过理论分析、专家咨询、内容分析的方法构建层级,并基于现代测量学理论分析进阶模型有效性的研究方式.而转化

China Social Science Excellence. All rights reserved. https://www.rdfybk.com/

性学习进阶研究则基于建构主义学习观,其认为学习是一个以目标为导向的、旨在促进学生概念发展的活动.因此,转化性学习进阶研究的目的是为了理解个体学习特定概念的进程以及如何通过教学来推动这一进程.换言之,转化性学习进阶研究认为,进阶层级的构建应依据学生的真实表现而非文件,进阶研究的重点应是学生在层级间的转化过程而非阶段的识别.

二、学习进阶层级转化的机制

识别进阶层级是实现进阶转化的基础.在标志性学习进阶的研究中,研究者比较重视的都是进阶模型的构建,主要关注学习目标、进阶变量、成就表现、预期表现和评价这五个要素[7].然而,学生的学习不是一蹴而就的,而是一个循序渐进的过程.因此,关注学生是如何从较低的进阶层级发展到较高的进阶层级的转化性研究逐渐受到研究者关注.

在教学实验的过程中,激进建构主义流派的研究者通过对学生学习过程的反思性抽象,提出了图式理论、重组假设以及活动—效果关系反思理论,试图深入解释学生学习过程中发生的层级转化.

皮亚杰认为"图式是指动作的结构或组织,这些动作在同样或类似的环境中由于重复而引起迁移或者概括"[8].冯·格拉斯菲尔德(von Glasersfeld)认为,在某一具体领域下的任何一种图式都是在个体经验基础上建构起来的[9].他认为所有图式都有三个成分:(1)识别一个具体情境或者经验的模板;(2)和经验相关的具体心智活动;(3)一个预期的结果,简言之,就是"情境—活动—结果".当个体具有了某个图式,就具有了解决某个水平的问题的能力,但是当个体遇到超越这个水平的问题时,他还会尝试使用已有的图式来解决新问题,但是会遭遇失败,引起认知冲突,从而激发个体构建新的图式.因此,可以将学习进阶中的层级转化理解为学生的图式水平不断发展变化的过程.

斯特弗(Steffe)通过对学生的分数图式构建过程的分析,明确提出了重组假设,进一步解释了概念发展的过程[10].斯特弗认为学生的分数图式是对自然数计数图式的顺应.这可以从两方面来理解,一方面,在自然数计数图式中,儿童操作的材料是离散量,而在分数图式中,儿童通常操作的是连续量,因此,面对新的情境,儿童的操作内容有所不同;另一方面,尽管分数图式可以解决自然数计数图式不能解决的问题,但是分数图式也没有完全超越自然数计数图式,在解决问题的时候,还是需要类似自然数计数图式的操作(比如,1个1/7,2个1/7……).因此,分数图式可以被看成是自然数计数图式的"重组",也就是说,儿童的自然数计数图式中的操作以一个新的形式出现了.由于学生在新的(分数)情境中也使用计数图式,这个过程包含比原有的自然数计数图式更多的内容,因此这个"重组"的过程就是对原有的同化结构(自然数计数图式)的推广或者顺应,这时候层级转化就发生了.

重组理论不但可以解释学生分数图式的学习过程,也可以推广到其他概念的学习中.建立在认知重组基础上的概念学习更能够促进学生在新旧概念之间建立联系,从而减少学生学习新知识的障碍.因此,发现新旧概念之间共同的认知根基(Cognitive Root)[11],识别指向大概念的认知发展轨迹对促进学生学习、减少学习障碍具有不可忽视的理论价值和实践意义.

撒冷进一步指出学习者通过对"活动—效果关系的反思"(Reflection On Activity - Effect Relationship)对已有的图式进行重组[12].为解决新情境中的问题,大脑需要两种类型的反思,第一种反思是比较预期的活动效果和实际的活动效果,目的在于注意到效果与预期之间的差异,从而创建新的、临时的"活动—效果"的二元结构.第二种类型的反思则是在不同的情境中对新建立的临时的二元结构中的"活动—效果关系"进行多次比较,从而建立更为稳定的"活动—效果关系",经过这两种类型的反思,新的图式就基本构建起来了[13].新的图式还需要两个本质不同的阶段才能够达到稳定的水平.第一个是参与阶段,在这个阶段,学习者开始有对于"活动—效果关系"的新预期,但这种预期还不太稳定,会受到以前图式的干扰,需要提示(可能是动手操作、同伴提示,甚至自我提示)才能发挥作用.第二个阶段是预期阶段,此时,学生已建立稳定的"活动—效果关系",他们不再依赖提示,甚至也不需要实际操作的检验,就能够预测到活动的效果[14].只有达到了预期阶段,学习者才真正掌握了新知识,也做好了进行下一次重组的准备.

基于上述理论分析学生的学习过程,可以恰当评估学生所处的层级水平,并了解学生在层级转化中出现的实际困难.同时,对学生层级转化过程的分析也能够完整地追踪学生的认知发展过程,检验或修订进阶层级,进而构建更完善的进阶模型.

三、指向大概念的学习进阶模型的构建与检验方式

识别与构建概念发展的层级是所有学习进阶研究的重要方面.杜施尔(Duschl)在对大量学习进阶研究进行综述的基础上,提出了自上而下的验证性学习进阶构建取向(Confirmatory Approach)和自下而上的演进性学习进阶构建取向(Evolutionary Approach)[15].一般来说,标志性学习进阶模型的构建更多采用验证性取向,而转化性学习进阶模型的构建更多采用演进性取向.然而,促进大概念层级转化的学习进阶的构建,应该注重二者的结合,寻找大概念的认知根基以及认知发展路径.

(一)验证和演进相结合的大概念学习进阶构建方式

验证性的学习进阶构建取向一般通过文献回顾、

China Social Sciences Excellence All rights reserved. https://www.ndlib.cn/

文本分析、专家咨询等方法来实现，其步骤一般包括首先确定大概念的目标及群体，其次通过文献回顾、文本分析、专家咨询构建学习进阶模型以及通过测验等方式来检验模型的有效性．但是，验证性学习进阶的构建更重视大概念的识别以及进阶层级的发现，较为忽视层级之间的转化．

演进性的学习进阶构建方式是指通过对学生学习过程的深入分析而形成进阶层级的划分与层级间转化的描述，主要采用斯特弗和科布（Cobb）等人于1980年左右提出的建构主义教学实验的方法（Constructivist Teaching Experiment）进行[16]．演进性学习进阶模型比较关注具体学科的核心概念进阶模型的构建，在与学生互动的过程中构建兼具推广性和解释性的进阶模型，其不但能够提炼不同的进阶层级，还能提供在教学过程中识别学生典型的错误概念（边界）以及促进学生层级转化的方法．

在构建大概念学习进阶模型时，可以融合验证性和演进性两种构建方式．总的来说，其构建方式包括修补式和生成式．修补式主要是先基于文献综述、文件和专家咨询等自上而下地构建进阶模型，并使用大规模测验的方式来检验模型的有效性，然后针对测验结果与模型不符合的部分，采取自下而上的演进性的方式来对模型进行修订．因此，修补式的构建方式首先是构建大概念的进阶模型，然后再构建其中某个子概念的进阶模型．生成式则是先通过演进性的方式构建进阶模型，然后使用大规模测验的方式来检验模型的有效性．由于演进性的学习进阶构建方式一般要求对学生的概念发展进行长期跟踪，而大概念通常跨越几个年级，甚至跨越学段，因此想要围绕一个大概念进行长期跟踪是不太现实的，但是研究者们可以围绕大概念中的某个子概念或者大概念的某个发展进阶进行追踪，并构建其进阶模型，而将不同研究者对某个大概念不同子概念的研究进行整合，就可以得到大概念的学习进阶模型了．然而，如何保证不同研究者所构建的学习进阶模型能够整合到一起呢？这就需要研究者探索大概念发展的认知根基和认知发展主轴．

（二）探寻大概念发展的认知根基

对学习进阶的研究一般将进阶起点定义为“学生最初的一些幼稚的概念，通常是基于学生对世界的观察和生活经验”[17]，而作为学习进阶的“下锚”，进阶起点的确定应该从学生对某核心概念最原始的认知起点即认知根基来考量．

认知根基一词是多尔（Tall）提出的，其将认知根基定义为学生开始一个学习时围绕某一核心概念的一个有意义的认知单元，这个认知根基使得学生最初的学习方式是认知扩展（Cognitive Expansion）而不是认知重构（Cognitive Reconstruction），这一根基为后续长期的发展和学习提供了可能性，也为后续复杂概念/思维的发展提供了扎实的基础[18]．多尔以函数为例，指出函数机器（类似一个输入—输出的盒子）可以作为函数学习的一个认知根基．斯特弗在对分数图式的研究中，将自然数的计数图式作为分数学习的认知根基．康弗瑞（Confrey）等人提出儿童对等量关系的理解可以作为方程学习的根基[19]．对认知根基的探寻可以为大概念学习进阶的构建找到真正的学习起点，从而使新概念的学习不再是空中楼阁．

（三）以认知发展轨迹作为大概念的进阶变量

大多数研究者选取的进阶变量是学科中的某个学科概念或某项关键能力[20]，进阶变量选取的方法通常是教材分析或专家咨询．现有的学习进阶研究，有的直接以知识的发展脉络作为进阶变量，有的则使用SOLO（Structure of the Observed Learning Outcome，可观察的学习结果的结构）、APOS（Action - Process - Object - Scheme，操作—过程—对象—图式）等概念学习理论作为学习进阶变量，但这些理论是对概念学习的概括性的解释，并不能反映某个概念发展的本质性变化．学习进阶研究若想要真正支持学生的学习，就需要以某一核心概念的认知根基为起点，围绕学生在该概念上的认知发展构建概念发展的主轴．毫无疑问，以学生的认知发展轨迹作为学习进阶模型的进阶变量对于研究者来说是一个挑战性的任务，因为这不但要求研究者对核心概念的学科本质有足够的了解，明确反映核心概念本质的进阶终点，更需要在与学生互动的过程中能够对学生的思维变化过程进行深入分析，从而构建围绕特定核心概念发展的学生认知发展轨迹．撒冷和斯特弗等人通过对分数概念以及学生分数学习过程的分析，指出分数测量意义才是分数的本质，并提出了分数图式发展的八阶段学习进阶模型，其中逐渐复杂的迭代和分割操作是该进阶模型的认知变量[21]．汤普森（Thompson）通过对学生函数概念学习的研究，指出协变推理是函数概念发展的主轴，并构建了协变推理发展的六个水平[22]．由于对学生学习过程的关注，转化性学习进阶的研究者围绕学生认知发展构建的学习进阶模型很可能与现行的课程设计有较大出入，因此研究者们大多为教师提供配套的课程资源、活动设计方案及诊断工具，以提升进阶模型对课程设计和教学实践的指导价值．

（四）通过设计实验，检验进阶层级及层级转化方法的有效性

验证性取向的研究者经常通过大规模测试并使用现代测量学模型对其构建的学习进阶模型的有效性进行检验，而演进性学习进阶的研究者则较多使用建构主义教学实验，一方面来检验先前或他人构建的学习进阶模型的有效性，另一方面也可能会发现新的进阶层级或提出新的理论．而近年来更多的研究者开始采用设计研究的方式[23]，一方面可以对假设性的学习轨迹模型的有效性进行检验和修订，另一方面还可以在实际教学过程中收集与教学和学习相关的资料，以便形成和完善基于学习进阶模型的教学设计，为某个大概念的层级转化提供真实的、可操作的支持

China Social Science Excellence. All rights reserved. https://www.rdfybk.com/

性教学工具及可靠的诊断工具.

四、开发促进大概念理解水平向纵深发展的配套资源

西蒙在教学环模型中强调,假设性学习轨迹不但要求要基于数学知识和对学生学习过程的假设制定教学目标,还要求教师根据学科知识、学生知识、数学活动和表征方式以及学生学习特定内容的知识制定符合学生学习过程的“学习活动的计划”[24].而如何制定促进层级转化的学习活动是大多数进阶模型中比较缺少的内容.转化性学习进阶研究者不但提出了层级转化的理论,也为如何促进学生层级转化提供了大量宝贵的资源和案例.总的来说,他们主要可以提供以下几种资源来促进学生大概念的生成与转化.

(一)开发集学习轨迹—课程资源—诊断评估为一体的线上学习资源库

在传统课堂中,教师一般基于教学经验和教材来制定教学目标,学习进阶模型的构建为教师提供了基于证据的学生学习轨迹模型,因此教师可以基于学习进阶模型来诊断学生的水平并制定相应的教学目标.但仅依靠教师个人来完成这个工作几乎不可能,因此康弗瑞等人一直在致力开发衔接学习进阶成果、课程材料及诊断工具的线上学习体系.这些研究者首先开发了与数学共同核心课程标准配套的启发共同核心数学网站(TurnonCCMath.net)[25],之后他们认为该网站的学习轨迹受到共同核心标准的限制,不能完全体现基于研究的核心概念的轨迹,因此他们针对6~8年级学生又开发了数学地图(Math Mapper 6-8)网站.该网站实现了“学习—课程—评价”一体化的理念,教师可以在网站上清晰地了解每个核心概念的学习轨迹,并利用配套的诊断性工具对学生的学习进行诊断,然后制定个性化的学习目标,为学生提供恰当的学习活动[26].

(二)开发促进概念生成和层级转化的教学辅助工具

一般的教具或游戏比较重视体验,但是基于学习进阶的教学辅助工具则更注重给学生提供构建认知根基以及促进学生反思,从而为学生大概念的发展奠定基础以及提供“脚手架”.克莱门茨(Clements)等人根据对组合图形的研究摒弃了一般的拼图游戏的随意性,开发了仅有规则图形组成的拼图玩具[27],从而促进幼儿对图形的边角关系的思考,为图形拆分组合提供了操作经验;撒冷和哈恩特(Hunt)提出的“分薯条”游戏[28],以及奥利弗(Olive)等人开发的分数条(Java Bars)的线上学习工具②,均强调通过迭代操作来帮助学生理解分数的测量意义,并为学习分数乘法和分数除法提供“脚手架”,从而为发展有理数这个大概念奠定了扎实的基础;撒冷等人开发了“请去帮我拿宝塔(Please go and bring for me)”的游戏[29],帮助学生区分单一单位和复合单位,一方面帮助学生发展其乘法推理思维,另一方面也为学生将来区分更多水平的单位,进行多水平单位的协同奠定基础.从以上例子可以看出,学习进阶研究者们通过长期的教学实验和研究设计所开发的教学产品关注的不是产品的娱乐性(尽管他们也会考虑如何激发学生的兴趣,但这绝不是最主要的目标),而是它能否为大概念发展起到奠基作用,同时研究者们也通过提供游戏规则、教学流程及问题来促进学生在活动中反思活动与效果之间的关系,从而进行层级转化.

(三)开发更具精度的进阶层级模型及能够精准测评的诊断工具

随着进阶研究的深入开展,研究者们提出了更具精度的学习进阶层级模型.精度/粒度(Grain Size)原本是来自矿物学和材料学中的概念,表示结晶粒度,研究者认为粒度会影响材料的性能,并且一个较小的颗粒会提高物质的强度和韧性[30].后来,精度的概念被引入教育测评和学习进阶的研究中,强调对学生的表现或学习进程进行精细化的评价或描述,而这种精细化的描述更有助于学生构建稳定和完善的概念图式.如,伯恩巴姆(Bernbaum)等人针对6~12年级的学生提出了函数学习的六水平学习进阶模型(前代数、前结构、单一结构、多元结构、关系结构和拓展抽象),而康弗瑞等人基于均分操作提出了跨度更大(从小学到高中)但也更具精度的十四个水平的函数学习进阶模型[31].康弗瑞认为学习进阶精度的选择受到学习进阶使用方式的影响,课程的开发需要一定的概括性,因此精度要求不高,而日常教学和诊断性评价则需要更具精度的进阶层级.撒冷基于层级转化理论中的参与阶段和预期阶段,提出了精细化测评(Fine Grain Assessments)理论,不但可以对学生所处的进阶层级进行评价,还能够具体指出学生处于这个进阶层级的什么水平(未达到参与水平、较低参与水平、较高参与水平、预期水平)[32].康弗瑞等人认为基于学习进阶的课堂评价可以为学生的学习提供与学生学习进程相关的、及时的、详细的、具有行动指导的反馈[33],而在学习进阶研究的基础上,设计提供精细化评价反馈的课程能够帮助教师更好地开展精准教学(Target Teaching),教师不但能够更好地把握教学的方向,也更容易作课程决策[34].

五、结语

我国的学习进阶研究刚刚起步,尽管当前课程标准的编制和教材的开发都强调学生的学习,但是关于学生学习的实证研究成果较少,而且研究结果与课程设计和教学实践之间还存在较大的鸿沟.学习进阶的研究成果对于保证课程设计的连贯性、提升教师教学的针对性有着重要的价值.因此,开展针对我国中小学生大概念学习进阶的实证研究,对标志性和转化性学习进阶的相关成果进行汇总,并以此作为课程标准修订和教材设计的依据,探寻大概念发展的认知根基及发展轨迹,并在此基础上,开发集“学习—课程—教学—诊断”于一体的线上学习资源库,将有助于教师更好地把握概念的本质,识别学生所处的位置,为

China Social Sciences Excellence. All rights reserved. http://www.zlfbbk.com

促进学生核心素养发展的深度教学做准备.

注释:

①本文在论述中统称“学习进阶”,但引用他人文章时则尊重作者原来的用词.

②详见 http://math. coe. uga. edu/olive/welcome. html#LatestJBinstallers.

参考文献:

[1][24]Simon,M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective[J]. Journal for Research in Mathematics Education,1995,26(2):114 –145.

[2] National Research Council. Taking Science to School: Learning and Teaching Science in Grade K – 8 [M]. Washington, D. C. :The National Academic Press,2006:94.

[3][33]Confrey,J. ,Maloney,A. P. ,Belcher,M. ,et al. The concept of an agile curriculum as applied to a middle school mathematics digital learning system(DLS)[J]. International Journal of Educational Research,2018,92:158 –172.

[4]Confrey,J. ,Maloney,A. P. ,Nguyen,K. H. ,& Rupp,A. A. Equipartitioning: A foundation for rational number reasoning [G]// A. P. Maloney, J. Confrey, & K. H. Nguyen. Learning over Time:Learning Trajectories in Mathematics Education. Charlotte,NC:Information Age Publishing,2014:61 –96.

[5]Confrey,J. ,Gianopulos,G. ,McGowan,W. ,et al. Scaffolding learner – centered curricular coherence using learning maps and diagnostic assessments designed around mathematics learning trajectories[J]. ZDM – Mathematics Education, 2017, 49 (5): 717 –734.

[6]Tzur,R. Hypothetical learning trajectory (HLT):A lens on conceptual transition between mathematical “markers” [G]// D. Siemon,T. Barkatsas,R. Seah. Researching and Using Progressions(Trajectories) in Mathematics Education. Rotterdam: Sense, 2019:56 –74.

[7][20]张颖之. 理科课程设计新理念:“学习进阶”的本质、要素与理论溯源[J]. 课程·教材·教法,2016(6):115 –120.

[8]皮亚杰. 发生认识论原理[M]. 王宪钿,等,译. 北京:商务印书馆,1981:3 –4.

[9] Von Glasersfeld, E. Radical constructivism: A way of knowing and learning[M]. Washington,D. C. :Falmer,1995:65.

[10]Steffe,L. P. ,Olive,J. Children’s Fractional Knowledge [M]. New York:Springer,2010:47.

[11][18]Tall,D. The function machine as a cognitive root for the function concept[Z]. In Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,Tucson,Az,oct. 7 –10,2000: 255 –261,4.

[12][32]Tzur,R. Fine grain assessment of students mathematical understanding:Participatory and anticipatory stages in leaning a new mathematical conception[J]. Educational Studies in Mathematics,2007,66(3):273 –291.

[13]Tzur,R. Can dual processing theories of thinking inform conceptual learning in mathematics? [J]. The Mathematics Enthusiast,2011,8(3):597 –636.

[14]Simon,M. A. ,Tzur,R. ,Heinz,K. ,et al. Explicating a mechanism for conceptual learning:Elaborating the construct of reflective abstraction[J]. Journal for Research in Mathematics Education,2004,35(5):305 –329.

[15]Duschl,R. ,Maeng,S. ,& Sezen,A. Learning progressions and teaching sequences:A review and analysis[J]. Studies in Science Education,2011,47(2):123 –182.

[16]丁锐,金轩竹,Tzur,R. ,等. 建构主义教学实验研究:演进性学习进阶的构建取向[J]. 教育科学研究,2019(7):54 –60.

[17]Plummer,J. D. ,Palma,C. ,& Rubin,K. Evaluating a learning progression for the solar system:Progress along gravity and dynamical properties dimensions [J]. Science Education, 2020: 1 –25.

[19][25]Confrey,J. ,Nguyen,K. ,Lee,K. S. ,et al. Turnon CCMath. net:Learning trajectories for the K –8 common core math standards[EB/OL]. (2013 –10 –18)[2019 –11 –30]. https://sites. google. com/view/panorkou/projects/turnonccmath.

[21]丁锐,卫冰倩,Tzur,R. ,等. 分数度量意义发展的认知根基及轨迹:分数图式进阶理论[J]. 数学教育学报,2021,30(3):64 –72.

[22]Thompson,P. W. ,& Carlson,M. P. Variation,covariation,and functions:Foundational ways of thinking mathematically [G]//J. Cai. Compendium for Research in Mathematics Education. Reston,V. A. :National Council of Teachers of Mathematics,2017: 421 –456.

[23][26][34]Siemon,D. ,Horne,M. ,Clements,D. ,et al. Researching and using learning progressions(trajectories)in mathematics education[Z]. In Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Singapore,Jul. 17 –22,2017:109 –136.

[27]Clements,D. H. ,& Sarama,J. Learning trajectories in mathematics education[J]. Mathematical Thinking and Learning, 2004,6(2):81 –89.

[28]Tzur,R. ,& Hunt,J. Iteration:Unit fraction knowledge and the french fry tasks[J]. Teaching Children Mathematics,2015, 22:148 –157.

[29]Tzur,R. ,Johnson,H. L. ,Hodkowski,et al. Beyond getting answers:Promoting conceptual understanding of multiplication [J]. Australian Primary Mathematics Classroom,2020,25(4): 35 –40.

[30]Wellman,B. Grain size and material strength[N]. Technical Tidbits,March 2010,Issue No. 15.

[31]Confrey,J. ,Maloney,A. ,Belcher,M. et al. Future of education and skills 2030:Curriculum analysis:A synthesis of research on learning trajectories/progressions in mathematics[M]. Paris:OECD,2018:12.

【作者简介】丁锐,东北师范大学教育学部副教授,博士(130024);金轩竹,珠海容闳学校(519060);魏巧鹤,东北师范大学教育学部(130024).

【原文出处】《教育科学研究》(京),2022.1.60~66

【基金项目】本文为教育部人文社会科学研究规划基金2019年度一般项目“小学生数学核心概念学习进阶的构建与诊断”(19YJA880007)的成果之一.

China Social Science Excellence .All rights reserved. https://www.rdfybk.com/