

# 国际数学史与数学教育(HPM) 发展历程及启示

岳增成 汪晓勤

**【摘要】**数学史与数学教育(HPM)的结合是中小学开展数学科普、建设数学文化的重要途径,是对国家重视数学人才培养的积极回应。然而,我国的HPM还存在诸多问题,对国际HPM发展的梳理能为问题的解决提供借鉴。结合内容分析法对以英文HPM专辑文章为主的对象分析发现,国际HPM发展经历了萌芽、初创、发展、繁荣四个阶段,其研究群体、研究主题、研究类型趋于多元。

**【关键词】**HPM;内容分析;发展趋势;学科建设

在科学传播日益受到重视的今天,数学科普在理论层面并未引发足够的重视。在中国知网以“数学科普”为检索主题、“跨库选择”全选,检索出的文献仅有百余篇,且关注的主题主要聚焦于科普经验。鉴于数学科普的重要性与现状间的落差,科技部办公厅、教育部办公厅、中科院办公厅、自然科学基金委办公室联合制定了《关于加强数学科学研究工作方案》(国科办基[2019]61号),其中要求将数学科普、数学文化建设与中学数学教育相结合,强调了基础教育在数学科普、数学文化建设中的重要地位。数学史具有知识之谐、探究之乐、方法之美、能力之助、文化之魅、德育之效等教育价值,<sup>[1]</sup>HPM(History and Pedagogy of Mathematics,数学史与数学教育)是学校教育中开展数学科普、建设数学文化的重要路径。HPM自进入中国以来已获得了长足的发展,在数学史与数学教育融合、坚守基础与积极借鉴、理论与实践互动的过程中,中国构建了具有本土特色的HPM理论体系,特别是在数学史教育价值和融数学史于教学的框架方面<sup>[2-4]</sup>贡献了东方智慧,丰富了国际HPM研究。然而,与国际上HPM四十多年的发展相比,我国的HPM研究起步较晚,还存在着对已有研究不关注、研究方法缺乏科学性、缺少数学史家与数学教师的合作、缺少对学生认知发展的关注,<sup>[5]</sup>高评价低应用、知易行难等问题。他山之石,可以攻玉。已有很多研究者将视角转向国际,但目前的研究主要以横向的评价为

主,<sup>[6-7]</sup>缺乏对HPM研究纵向发展的梳理。因此,需要从历史的视角出发,通过回答国际HPM的发展有什么样的特点、趋势,为我国HPM的本土化探究、学科建设等带来启示,进而为数学科普的开展、数学文化的建设提供路径。

## 一、分析框架

内容分析法是一种对研究对象的内容进行深入分析,透过现象看本质的科学方法,它有解读式、实验式、计算机辅助三种类型。<sup>[8]</sup>本研究采用解读式内容分析法,主要对能集中反映特定时段内HPM发展情况的英文HPM专辑进行分析。HPM专辑是HPM共同体对某一时段内领域热点、重点话题系统梳理的成果,因此,对其的分析能够梳理出国际HPM发展的特点与趋势。除了专辑文献,国际范围内有代表性的文献也是本研究的分析对象。

具有重要意义的事件往往是某一学科发展过程中的关键节点。HPM的发展过程中有许多重要的节点:1972年,HPM国际研究小组的组建,标志着HPM作为一个独立的研究领域出现,相关人员形成合力,试图在组织内部达成理念上共识,HPM发展从萌芽走向初创;1991年,加拿大数学教育杂志FLM(For the Learning of Mathematics,数学学习)刊发了第一个HPM专辑,标志着从事HPM研究与实践的数学教育人员力图通过学术共同体的力量来促进HPM理念的传播;从1992年开始,MC(The Mathematical Gazette,

数学公报)、MS(Mathematics in School, 学校数学)、MJRME(Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 地中海数学教育研究)等杂志先后刊发了5个HPM专辑,可见HPM学术共同体致力于HPM理念的广泛传播,这也标志着国际HPM处于快速发展阶段;2007年,ESM(Educational Studies in Mathematics, 数学教育研究)刊发HPM专辑,随后,MS、JBSHM(Journal of the British Society for the History of Mathematics, 英国数学史学会杂志)、SE(Science & Education, 科学与教育)、PRIMUS(Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 大学数学研究中的问题与资源)、ES(Education Sciences, 教育科学)等杂志先后刊发高质量的HPM专辑,特别是国际顶级数学教育期刊ESM和重要的科学教育期刊SE专辑的组织,则标志着HPM研究走向繁荣。

研究人员的构成、研究主题的丰富程度、研究类型运用的多寡以及运用的规范与否与特定领域的研究情况密切相关。因此,从研究群体、研究主题、研究类型对每个阶段的文献进行内容分析,就能梳理出HPM国际发展的特点与趋势。HPM的研究群体包括数学教师、数学家、数学史研究者、HPM研究者,后两者的区别在于前者不关注教育。结合汪晓勤对HPM研究主题的分类,<sup>[9]</sup>将研究主题分为历史取向的数学史研究、关于“为何”“如何”之探讨、教育取向的数学史研究(包括数学专题、数学人物、数学问题、教学策略等类型)、<sup>[10]</sup>教学实践与案例开发(根据实践主题所在的学段,将实践场域分为小学、中学、大学)、HPM与教师专业发展、数学史融入教材研究、认识论视角下的数学史探究(主要包括数学史与数学、哲学、教育学、心理学关系的研究,历史相似性研究)等类型。结合已有的HPM研究,从经验总结、理论思辨、历史研究、实证研究对研究类型进行分析。

## 二、研究结果

### (一)萌芽阶段(1972年以前)

对HPM共同体而言,1972年具有重要的历史意义,因为这一年在英国埃克塞特(Exeter)召开的第二届国际数学教育大会上,成立了数学史与数学教育关系国际研究小组。

在此之前,历史取向的数学史研究是数学史研究

的主流,数学史家通过它来还原数学史实,揭示数学的文化价值,并在研究的过程中,逐渐认识到了数学史除文化价值以外的教育价值,众多欧美知名数学家、数学史家开始倡导在数学教学中直接或间接地利用数学史。<sup>[11]</sup>如国际知名数学史家史密斯(Smith)、洛利亚(Loria)等在1904年第三届数学家大会上共同倡议“数学史在今天已成为一门具有无可否认重要性的学科,无论从数学的角度还是从教学的角度来看,其作用变得更为明显,因此,在公众教育中给予其恰当的位置已成当务之急”<sup>[12]</sup>。对数学课程而言,数学史把数学概念从静态转向动态,通过记录数学家们在形成数学思想过程中所产生的影响,数学史使得数学人性化了。<sup>[13]</sup>对于职前、在职教师而言,数学史知识“乃是一种财富,这种财富不仅是宝贵的,而且是不可或缺的,它将使他们能够令人满意地完成自己的职责”。<sup>[14]</sup>也有部分数学史家进行了教育取向的数学史研究,一方面为数学课堂教学提供相关材料,如美国数学教师协会早在1969年就组织数学史家和数学教育家编写了《用于数学课堂的历史话题》,供数学教师使用;另一方面获取相关概念、公式、定理等的教学启示,如卡约里(Cajori)根据负数的历史提出“在教代数的时候,给出负数的图形表示是十分重要的。如果我们不用线段、温度等来说明负数,那么现在的中学生就会与早期代数学家一样,认为它们是荒谬的东西”。<sup>[15]</sup>

因此,在萌芽阶段,将数学史融入中小学课堂教学还主要停留在口号上,对数学史教育价值的认识主要停留在情感态度价值观层面,强调数学史的教育价值主要是由一批大数学家、数学史家进行理论思辨和经验总结的结果,数学史教育的受众主要是师范生,教育的内容主要是历史取向的数学史研究,教育取向的数学史研究较少,这也是数学史极少融入中小学数学课堂的主要原因之一。

### (二)初创阶段(1976~1991年)

60年代开始的“新数运动”强烈地反对“数学教育的历史观念”,然而,历史的出现犹如“反对教条主义的一剂良药”,不仅将数学看作一种语言,还将其视为人类的活动。<sup>[16]</sup>在这样的大背景下,HPM应运而生。在初创的早期阶段,历史取向的数学史研究依然处于主导地位,教育取向的数学史研究以及将数学

史融入中小学的尝试极为少见。但80年代后,情况发生了转变,如FLM在1980~1990年间刊发了27篇涵盖教育取向的数学史研究、数学教育中数学史的运用、职前及在职教师运用数学史的案例、数学教育史等主题的文章,<sup>[17]</sup>这表明在初创时期,HPM开始有了自己的研究主题,另外,福弗尔(Fauvel)曾为20世纪八九十年代发表的143篇HPM文献写过摘要的事实,<sup>[18]</sup>表明HPM的研究多了起来。

在这一阶段,关于“为何”“如何”之探讨仍是HPM领域关注的重点,几乎FLM专辑中的每一篇文章都有所涉及。如福弗尔总结了为何倡导在数学教育中应用数学史的15条理由,如能激发学生的学习兴趣、给予数学人文性、历史发展有助于安排课程内容顺序、向学生展示概念的发展过程有助于他们对概念的理解等,以及应用数学史讲述过去数学家的奇闻轶事、提供学生不熟悉的概念的介绍、讲授数学史课等12种方式。<sup>[19]</sup>与萌芽阶段对HPM教育价值的认识相比,这一阶段的认识不再仅仅局限于情感态度价值观层面,开始与知识理解、技能掌握相联系,且这一阶段的研究大多是数学教师或者HPM研究者基于教学经验进行的阐释与验证,并有一些研究对HPM的教育价值进行了批判性思考。如福勒(Fowler)讲述了研究数学史、讲授数学史的痛苦经历,他在文末指出,“数学有一个令人感到舒适的特点,即在数学中应用对与错比其他任何一门学科都容易,但是历史更加复杂,数学与历史的混合令人十分不适”。<sup>[20]</sup>但这一阶段的认识也有局限性,特别是未对教育价值进行梳理与归类。这一时期数学教师运用数学史的案例也多了起来,在FLM专辑中,有来自7个国家的12名数学教师分享了面对不同学生群体将数学史融入数学教学的经验。希腊的托马蒂斯(Thomaidis)讲述了将古希腊数学史与他所教的高中理论几何相结合尝试,如使用尺规作图来解决三等分角问题,托勒密定理的应用等,验证了数学史可用来为教学过程中出现的问题提供答案的假设。<sup>[21]</sup>但这些教学经验主要是“拼盘式”运用数学史材料的结果,缺少基于教育取向的数学史研究的支撑。

在初创阶段,HPM专职研究人员开始出现,数学教师与HPM研究者逐渐成为HPM的实践者与关注者。HPM的教育价值较为多元,价值阐释仍然是HPM

共同体关注的重点,但教学实践与案例开发逐渐多了起来。因此,经验总结、理论思辨是初创阶段的重要研究类型,而对教育取向的数学史研究、HPM与教师专业发展、教材中的数学史研究的关注并不多见。

### (三)发展阶段(1992~2007年)

自HPM的第一个专辑问世以来,HPM进入了快速发展阶段。在这个阶段,MG、MS等先后刊发了5个HPM专辑,共62篇文章,涉及的主题除教材中数学史的研究、历史取向的数学史研究外,其他主题都有所涉及(见图1)。“当代的研究者对某些具体的传统问题视而不见,但是这些问题的解决具有重要的价值,”<sup>[22]</sup>原始文献的重要性受到了人们的关注,教育取向的数学史研究(主题2)成为了发展阶段的关注热点,文章数超过总数的一半,而鉴于教育取向数学史研究的专业性,HPM研究者开始成为HPM的主要力量。教学实践与案例开发(主题3)仍是HPM的重要方向,文章数超过总数的25%。此外,关于“为何”“如何”之探讨(主题1)仍是HPM的一个重要主题,尽管HPM与教师专业发展(主题4)、认识论视角下的数学史研究(主题5)文献不多,但开始为HPM共同体所关注。为进一步了解这个阶段的整体情况,将发展阶段的专辑分成1992年、1997~1998年、2003~2004年三部分进行统计发现(如下页图2),在所有专辑中教育取向的数学史研究的文章数量一直多于其他主题的数量,这表明教育取向的数学史研究一直是发展阶段的热点研究方向,但在2003~2004年专辑中比例骤减。教学实践与案例开发在各个专辑中所占的比例(20%~25%之间)较为均衡。可见,教学实践与案例开发一直是HPM共同体关注的一个主题。关于“为何”“如何”之探讨、认识论视角下的数学史研究在各个专辑中都有所涉及,而HPM与教师专业发展仅在2003~2004年中有所涉及。

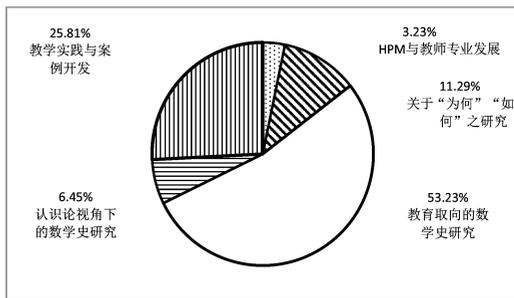


图1 发展阶段HPM的主题分布

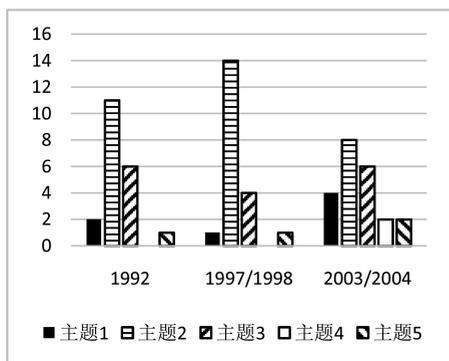


图2 MG、MS中HPM主题分布图

在33篇从教育的角度对数学史进行梳理的文章中,数学专题式的文章数最多为16篇,约占总数的一半。涉及的专题主要有两类,一类是对某个知识点的解读,如泰赫塔(Tahta)对印度古代冥想图Sriyantra的几何结构进行了分析,并就以往人们对它的论断进行了评价,<sup>[23]</sup>这类研究对教师将数学史融入相关知识点的教学具有直接借鉴价值;一类是对某个知识群的解读,如罗伯森(Robson)在楔形文字的计算中介绍了楔形数码的书写、六十进制记数系统、古代算术等内容,<sup>[24]</sup>这类研究对教师了解古代的数学十分有用,因此,可以用于教师教育。但鉴于知识群中知识点之间存在的层级,要将其运用于某个知识点的教学,需要教师结合教学内容与学生的认知水平进行选择、加工。数学人物式的文章有6篇,尽管研究的目的是有所不同,但从研究内容上看,可以分为两类:一类是数学历史名人教育思想的介绍,一类是数学成就的介绍。数学问题式的文章有7篇,教学策略式的文章仅有1篇,介绍了如何使用CD-ROM讲授密码学的历史。此外,还有3篇文章分别介绍了弧度命名的历史、互联网中的数学史料及其检索方法、小数符号在欧洲大陆的发展情况。

在16篇教学实践与案例开发的文章中,来自小学、中学、大学的分别有3、10、3篇,可见HPM共同体对中学阶段的HPM教学实践与案例开发比较关注。“拼盘式”介绍数学史运用的文章减少,HPM研究者与数学教师开始以案例开发的形式介绍HPM的实践成果。如:赖斯(Rice)通过柏拉图“美诺篇”中倍正方形问题的教学,使学生意识到并不是所有的几何问题都可用数值法给予解答;<sup>[25]</sup>冯·马南(Van Maanen)在较为详尽地考察了意大利法律教授巴尔多鲁毛

1355年完成的关于汛期结束后各种河床土地分配问题的拉丁文著作后,将其应用于荷兰文法学校11岁学生的数学教学,结果既增加了学生平面几何的知识,也增加了他们的历史知识,还极大地激发了他们学习拉丁语的热情。<sup>[26]</sup>但案例开发也有不同的形式,以赖斯的教学实践为代表的案例开发是数学史的片段式运用,不需要对数学史料进行系统的考察,只需要将片段式的史料应用于课堂教学即可,以冯·马南的教学实践为代表的案例开发则是数学史料的系统运用,需要对某部数学著作或某个知识点的历史发展进行全局性考察,并在此基础上将数学史料有选择性地应用于课堂。因此,后者往往需要做大量的教育取向的数学史研究,这也进一步体现了这一发展阶段对基于教育取向的数学史研究的关注。

在关于“为何”“如何”之研究方面,有人对数学史的教育价值进行了新的阐释,如库尔(Kool)运用实例,结合荷兰现实数学教育理念,阐释了数学史可以作为课堂中一名额外的学生使用,<sup>[27]</sup>福瑞蒂(Furinghetti)对已有文献中数学史的教育价值进行了总结,概括出了数学史在数学教育中扮演的两大角色,促进对作为文化社会过程的数学本质的反思与构建数学知识。<sup>[28]</sup>可见,此主题的研究视角更为多元。认识论视角下的数学史研究在国外并不是一个新的研究方向。1993年开始举办的欧洲最具影响力的HPM会议——欧洲暑期大学(European Summer University)的主题就是数学教育中的历史与认识论,历史相似性研究是其重要研究方向,巴格尼(Bagni)等分别对历史相似性问题进行了实证研究、理论探讨,<sup>[29]</sup>索耶(Sawyer)则从数学、数学史、数学教育的关系出发探索了数学史何以能融入数学教学的问题。<sup>[30]</sup>在HPM与教师的专业发展方面,瓦尔德格(Waldegg)在引导高中教师以合作的形式解决一系列经典的数学问题后,通过数据分析发现教师对学生问题的概念元素与认知困惑有了更加清晰的认识。<sup>[31]</sup>

总之,鉴于发展阶段教育取向数学史研究受重视程度提高的现实,HPM研究者逐渐成为HPM共同体的主要力量,历史研究成为HPM研究领域的重要研究类型。教学实践与案例开发仍是这个阶段的重要研究主题,这也就决定了数学教师是此阶段HPM共同体的重要成员,经验总结是其重要研究方法。此外,新

的研究主题的出现,表明 HPM 的研究趋于多元,而 HPM 对学生学习、教师专业发展影响的调查,历史相似性验证的出现,则表明实证研究在应用方面的发展,但方法的应用还不够规范,仅通过一些简单的调查获取数据。

#### (四) 繁荣阶段(2007 年以来)

数学教育研究水平的提高,为 HPM 的发展带来了新的契机,HPM 也受到了越来越多的关注.自 2007 年国际顶级数学教育期刊 ESM 刊出 HPM 专辑以来,国际上一些知名期刊,如 SE、PRIMUS、ES 在 2014 年相继刊出 HPM 专辑. HPM 的研究也相对多元,5 个 HPM 专辑 39 篇文章共涵盖了教学实践与案例开发、HPM 与教师专业发展、教育取向的数学史研究、认识论视角下的数学史研究、历史取向的数学史研究 5 个主题.其中,教学实践与案例开发成为这个阶段的关注热点,数量超过总数的一半;HPM 与教师专业发展受关注度提高,文章数量约占总数的五分之一;教育取向的数学史研究减少,认识论视角下的数学史研究仍是 HPM 共同体关注的问题,历史取向的数学史研究再次出现(见图 3)。

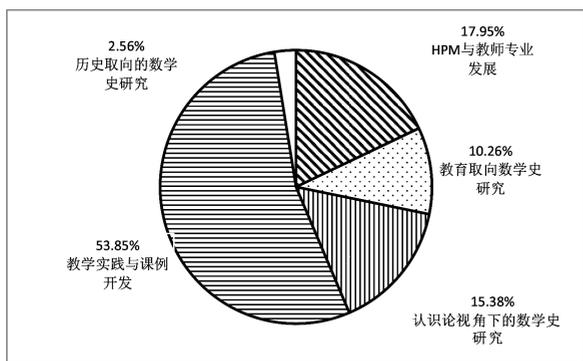


图 3 繁荣阶段 HPM 研究主题分布

在 21 篇与教学实践与案例开发相关的文章中,针对大学生(包括职前教师)、中学生、小学生、跨学段学生的文章分别为 14、4、3、1 篇.可见,HPM 共同体对运用数学史于大学教与学的重视,PRIMUS 的 HPM 专辑主题为“运用数学史的大学数学教与学”,则进一步印证了这一观点.从运用数学史的方式上看,“拼盘式”运用数学史料于课堂教学的介绍没有了,案例开发式地介绍 HPM 实践成果的文章仅有 4 篇.而以模块方式系统而深入地运用数学史的尝试显著增多.所谓的模块式是指致用于数学史应用的

教学单位,其规模可大可小,大至整个课程,小至两三节课.<sup>[32]</sup>如帕纳吉奥图(Panagiotou)以项目学习的形式,通过工作单、独立阅读、口头展示、书面论文等方式,引导希腊某实验高中一个班级的学生对圆锥曲线模块中的尺规作图、倍立方体、阿波罗尼奥斯的圆锥曲线等 6 个专题的原始文献进行学习发现,让学生直接接触一手的数学史文献,不仅会激发学生的动机、促进他们的理解,还有利于阐明作为一门学科和作为人类文明产物的数学的本质.<sup>[33]</sup>系统且深入地运用数学史的前提是教育取向的数学史研究,这也是包括案例开发在内的 22 篇文章的共同特点。

在 HPM 与教师专业发展方面的 7 篇文章中,莫斯福德(Mosvold)等利用 MKT(Mathematical Knowledge for Teaching, 数学教学需要的知识)理论对教师可以从数学史研究中获益的论断进行了理论化处理,并结合案例探讨了教师 MKT 的不同维度是如何从数学史中获益的;<sup>[34]</sup>萧文强描述并分析了由香港一线数学教师与教育研究者组成的团队的相关活动,他们的活动聚焦于刘徽所注的《九章算术》和欧几里得《原本》中的几个例子为代表的东西方文明中数学发展的比较研究.<sup>[35]</sup>原始历史素材成为促进数学教师专业发展的主要资源,教育取向的数学史研究成为促进教师专业发展的重要手段,项目或课程推动成为教师专业发展的外在形式.福瑞蒂为了帮助职前教师将数学教育教学理论应用于实践,让他们参与了一门累计时间 42 小时,需要对满足课堂要求的教学顺序进行设计的课程,并以“了解历史史料、选择合适主题、分析课堂需要、设计课堂活动、实施教学计划、评价课堂活动”的顺序介绍了 9~10 年级代数内容的教学顺序设计的过程.在探索原始文献阶段,职前教师需要对已选择出的原始文献进行深入分析以辨识出史料的认知根源与发展顺序.<sup>[36]</sup>

对教育取向的数学史进行专门研究的文章仅 4 篇.卡茨(Katz)提出了有别于经典的、从表征的观点来对代数发展阶段(修辞代数、缩略代数、符号代数)进行划分的新观点,即从概念的角度将代数的发展划分为几何阶段、静态方程解决阶段、动态函数阶段、抽象阶段.<sup>[37]</sup>文章篇数较少并不表示对基于教育取向的数学史研究关注的下降,相反,如在教学实践与案

例开发、HPM 与教师专业发展中分析的那样,HPM 共同体开始注重教育取向数学史研究在学生成长与教师专业发展等方面的应用,特别是知识群式的数学主题研究的应用,凸显了教育取向的数学史研究在 HPM 研究中的核心地位。

从认识论的视角考察数学史的文献有 6 篇,有人对历史相似性原理进行了批判性思考,托马蒂斯(Thomaidis)和塔纳克斯(Tzanakis)以希腊某中学两个班级的 16 岁学生对数轴与代数不等式顺序关系的认识为例,通过问卷调查对颇受争议的数学概念的历史进化与这些概念教与学的关系进行了检验,发现尽管教学因素对学生方法的运用和问题的解答造成了干扰和限制,严格的历史相似性是站不住脚的,但学生的理解困难与历史上数学家遭遇的障碍具有有趣的相似性,还有一些学生在未拥有合适概念工具的情形下,能将他们已有的知识应用于新的陌生的情境,能够给出正确的解答。<sup>[38]</sup>有人从哲学、心理学、教育学等基础学科的角度出发,对数学史何以能应用于数学教育进行了探讨,弗雷德(Fried)、奥特(Otte)分别从心理学、哲学的角度探讨了与数学史、教育的关系。

历史取向的数学史研究与数学教育有着千丝万缕的关联,但在初创、发展阶段,历史取向的数学史研究与 HPM 研究是两个完全不同的研究方向,而在繁荣阶段,卡茨等欲借助历史取向的数学史研究来丰富 HPM 研究——我们非常自豪地使得赫伊鲁斯的工作接近于我们的数学教育共同体。赫伊鲁斯(Jens Høyrup, 数学史家)描述了从公元前 4500 年左右到公元前 1600 年左右的历史进程中,米索不达米亚数学的社会、文化角色,以及数学思维模式与社会、文化角色之间的互动关系。<sup>[39]</sup>

除了研究主题的多元外,HPM 的研究类型也趋于实证。在 39 篇文章中,除基于教育取向和历史取向的数学史研究主题下的 5 篇文章运用了历史研究,及认识论视角下从学科关系出发探索数学史何以能应用于数学教育的 4 篇文章运用了理论思辨外,实证研究类的文章有 23 篇,约占总数的 60%。13 篇文章运用了个案研究、实验研究等研究方法。同时,HPM 的研究趋于规范。为了解决“HPM 研究缺少与一般数学教育研究框架、理论构建和方法论之间的联系”的

问题,HPM 研究正朝着融合一般数学教育研究运用的研究框架与理论构建的方向发展。结合上述的 MKT 理论,正如 Jankvist 分析的那样,MKT 理论不仅对 HPM 研究的实施有所裨益,而且 HPM 对教师 MKT 的完善也有所帮助。研究流程设计更加合理,如上述福瑞蒂六环节的课程教学顺序安排。此外,研究者们对研究过程中产生的文本数据、访谈数据、视频材料等进行收集、分析与处理,并在结果呈现时进行多角度论证。

总体而言,繁荣阶段的 HPM 研究人员、研究主题、研究类型趋于多元,基于教育取向的数学史研究的基础地位更为突出,开始被应用于以模块形式开展的课堂教学与教师专业发展,历史取向的数学史研究重新为 HPM 共同体所关注,从哲学、心理学、教育学的角度构建 HPM 的理论基础受到了更多关注。此外,一般数学教育理论的借鉴与实证研究的运用使得研究内容更加深入,研究的结论更具信服力。

### 三、研究结论与启示

2000 年前后,HPM 进入中国大陆地区。近十年来取得了长足的发展。HPM 研究者成为了 HPM 共同体的核心力量,中小学数学教师逐渐认识到数学史除了激励因素外的认知因素价值,越来越多的教师或与高校 HPM 研究者合作,或在名师的引领下利用中式课例研究将数学史融入单课教学以突出重点、突破难点。研究主题虽极少涉及认识论,但研究主题较为多元。然而,受限于数学教师的史学素养,“他们应用数学史的手法与中国台湾地区的 HPM 实践有着明显的差异,这种差异应该来自于参与实践的中学数学教师在数学史学习过程中的‘史学素养’,亦即对待历史文化脉络的观点和方式的差异上”。<sup>[41]</sup>另外,受数学教育传统的影响,大陆地区 HPM 的价值取向缺少数学史作为目标的视角,即数学史是数学的一部分,数学在不同时空的演进是学习的一个目标,<sup>[42]</sup>实践取向则缺少模块的组织,以单课作为使用数学史的基本单位,这不利于数学史作为目标的价值实现。在研究层面,我们同国际 HPM 研究的情况大致相同,缺少与一般数学教育研究框架、理论构建和方法论之间的联系。更确切地讲,我国主要以思辨研究和经验总结等方法对数学史的教育价值、数学史融入教学的策略、方法进行的研究,对教师的数学史知识和信念进行调查

研究,对教材中的数学史料进行内容分析,而缺少干预研究。<sup>[43]</sup>

国际 HPM 在经历萌芽、初创、发展、繁荣的过程中,研究的广度拓宽、深度增加,专业性得到了极大的提升,逐渐走向成熟.这主要表现在 HPM 研究者逐渐成为了该领域的中坚力量.他们基于自己的学术专长,既可以从事教育研究,又可以从事数学史研究;基于数学教育,特别是数学教育心理学中的理论基础或框架,应用规范的个案研究、实验研究等对除数学史融入教材研究外的主题进行深入的探索,特别是利用科学规范的方法研究了较长时间(模块式教学、教师培训项目)浸润在数学史中的学生、(职前与在职)教师的发展.这为我国的 HPM 发展带来了以下启示.

(一)将单元作为教师教学和教师培训中数学史使用的重要载体

无论从设计、实施,还是评价与研究上看,从单课走向单元都将有助于我国 HPM 的发展.从设计上看,与单元内容相关的数学史料相对较多且可能具有一定的发展脉络,史料的丰富性有助于教学的整体设计,有助于数学史运用层次“从历史的角度注入数学知识活动的文化意义,在数学教育过程中实践多元文化关怀的理想”<sup>[44]</sup>的开展;从实施上看,HPM 视角下单元教学的开展确保学生有相对持续的时间浸润在融入数学史的情境当中,有助于多维教学目标的实现;从评价与研究上看,持续时间较长的单元实施会产出多元的数据,多元数据的互证能够保证评价的科学性、研究的有效性.

(二)以实践需求为出发点,利用课例研究,在理论与实践的互动中提升教师的史学素养

HPM 是历史、数学、教育的融合,目前制约我国 HPM 发展的关键是教师的史学素养偏低,除了对待历史文化脉络的观点和方式存在一定的偏差外,大部分教师无法占有数学史料.因为现有数学通史的学习虽能改变教师对待历史文化脉络的观点和方式,但无法满足将数学史融入教学的需求,数学专题史虽能满足教学之需,但现有的研究很少,数学教师不具备独立研究专题史的能力.国际 HPM 发展给我们以启示,要注重知识群式的数学主题的历史研究及其在教学与培训中的应用.我们应以实践需求为

出发点进行教育取向的数学史研究,同时,也应借力我国基础教育的教研优势,在共同体的支持下,在史料选取、史料与教学内容的融合、教学实施、教学评价的活动中实现理论与实践的互通,提升教师的史学素养.

(三)建立 HPM 与一般数学教育乃至教育研究框架、理论构建和方法论之间的紧密联系

数学史教育价值的多样性、深刻性与 HPM 跨学科专业性间的矛盾,导致了 HPM 高评价、低应用的现实窘境,且由于 HPM 与其他教育理论间的“距离”,如数学课程改革强调数学与现实世界的联系,而 HPM 重视知识的发生与发展,使 HPM 成为数学教育的小众研究领域.为了更好地发展,我国 HPM 共同体需要像国际同行一样,进一步建立 HPM 与数学教育乃至教育研究框架、理论构建和方法论之间的联系.一方面,让 HPM 的理论基础更为坚实;另一方面,让 HPM 与一般数学教育领域的联系更为紧密,让更多的研究者了解 HPM.

#### 参考文献:

- [1][3] Wang X, Qi C, Wang K. A categorization model for educational values of the history of mathematics: An empirical study [J]. Science & Education, 2017, 26(7/9).
- [2] 岳增成. 中国 HPM 发展之路[J]. 教学月刊(小学版), 2019, (11).
- [4] Wang K, Wang X, Li Y, et al. A framework for integrating the history of mathematics into teaching in Shanghai [J]. Educational Studies in Mathematics, 2018, 98(2).
- [5] 康世刚, 胡桂花. 对我国“数学史与中小学数学教育”研究的现状分析与思考[J]. 数学教育学报, 2009, 18(5).
- [6] 吴骏, 汪晓勤. 国外数学史融入数学教学研究综述[J]. 比较教育研究, 2013, (8).
- [7] 蒲淑萍. 寻找历史与教学的最佳融合——国际 HPM2012 会议及其研究分析[J]. 数学教育学报, 2013, 22(1).
- [8] 邱均平, 邹飞. 关于内容分析法的研究[J]. 中国图书馆学报, 2002, (4).
- [9] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 16-19.
- [10] 田方琳, 汪晓勤. 美国《数学教师》中的 HPM 内容分析[J]. 数学教育学报, 2016, 25(4).
- [11][18] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数

学教育学报,2006,15(1).

[12][14] Fauvel J, Van Maanen J. History in mathematics education[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000: 91-92,45.

[13] Millar G A. Historical introduction to mathematical literature[M]. New York: The Macmillan Company, 1927: 38-39.

[15] Cajori F. A history of elementary mathematics[M]. New York: The Macmillan Company, 1917: 233.

[16] Clark K, Kjeldsen T F, Schorch S, et al. History of mathematics in mathematics education: Recent developments[C]//Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting, Montpellier: IREM de Montpellier, 2016: 135-180.

[17] Fauvel J. Editorial[J]. For the Learning of Mathematics, 1991, 12(1).

[19] Fauvel J. Using history in mathematics education[J]. For the Learning of Mathematics, 1991, 12(1).

[20] Fowler D. Perils and pitfalls of history[J]. For the Learning of Mathematics, 1991, 12(1).

[21] Thomaidis Y. Historical digressions in greek geometry lessons[J]. For the Learning of Mathematics, 1991, 12(1).

[22][30] Sawyer W. Mathematics as history[J]. Mathematics in School, 1997, 26(3).

[23] Tahta D. On the geometry of the Sriyantra[J]. The Mathematical Gazette, 1992, 76(475).

[24] Robson E. Counting in cuneiform[J]. Mathematics in School, 1998, 27(4).

[25] Rice A. A platonic stimulation: Doubling the square or why do I teach math? [J]. Mathematics in School, 1998, 27(4).

[26] Maanen V J. Teaching geometry to 11 year old "medieval lawyers" [J]. The Mathematical Gazette, 1992, 76(475).

[27] Kool M. An extra student in your classroom[J]. Mathematics in School, 2003, 32(1).

[28] Furinghetti F. History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy [J]. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2004, 3(1/2).

[29] Bagni T. Prime numbers are infinitely many: Four proofs from history to mathematics education[J]. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2004, 3(1/2).

[31] Waldegg G. Problem solving, collaborative learning and history of mathematics: Experiences in training in-service teachers [J]. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2004, 3(1/2).

[32][42] Jankvist U T. A categorization of the "whys" and

"hows" of using history in mathematics education[J]. Educational Studies in Mathematics, 2009, 71(3).

[33] Panagiotou N. A voyage of mathematical and cultural awareness for students of upper secondary school[J]. Science & Education, 2014, 23(1).

[34] Mosvold R, Jakobsen A, Jankvist U T. How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics[J]. Science & Education, 2014, 23(1).

[35] Siu M K. Study group in history of mathematics - some HPM activities in Hong Kong[J]. Education Sciences, 2014, (3).

[36] Furinghetti F. Teacher education through the history of mathematics[J]. Educational Studies in Mathematics, 2007, 76(2).

[37] Katz J V. Stages in the history of algebra with implication for teaching[J]. Educational Studies in Mathematics, 2007, 66(2).

[38] Thomaidis Y, Tzanakis C. The notion of historical "parallelism" revisited: Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line [J]. Educational Studies in Mathematics, 2007, 76(2).

[39] Hoyrup J. The roles of Mesopotamian bronze age mathematics tool for state formation and administration - carrier of teachers' professional intellectual autonomy [J]. Educational Studies in Mathematics, 2007, 76(2).

[40] Jankvist U T. An implementation of two historical teaching modules: Outcomes and perspectives [C]//Proceedings of the 6th European Summer University. Vienna: Holzhausen Publishing, 2011: 139-152.

[41] 苏慧玉. HPM 实践在中国台湾地区: 以《HPM 通讯》为研究个案[J]. 中国台湾地区数学教育期刊, 2019, 6(1).

[43] 岳增成. 数学史与小学数学教育: 问题与对策[J]. 小学数学教师, 2020, (7/8).

[44] 洪万生. HPM 随笔(一)[J]. HPM 通讯, 1998, 1(2).

**【作者简介】**岳增成, 杭州师范大学经亨颐教育学院(311121); 汪晓勤, 华东师范大学教师教育学院(200062).

**【原文出处】**《上海教育科研》, 2022. 4. 84~92

**【基金项目】**本文系 2020 年度教育部人文社会科学青年基金项目“多路径数学科普的构建及其对少数民族学生数学观的影响研究”(编号: 20YJC880117); 2019 年度教育部人文社会科学一般项目“乡村教育促进乡村振兴的理论与实践探索——以浙江安吉为例”(编号: 19YJA880056) 的研究成果。