

【专题：量感研究】

编者按：量感是《义务教育数学课程标准（2022年版）》中数学核心素养的主要表现之一，在2011年版的课标中没有相同或相近的核心概念与之对应，因此，有些教师对量感还比较陌生。本期专题文章对量感的内涵进行全面解读，并探讨了量感的培养策略，希望能对教师朋友们有所启发。

量感的内涵与特征

高博豪 吴立宝 郭 衍

【摘要】量感是《义务教育数学课程标准（2022年版）》中数学核心素养的主要表现之一，旨在培养学生通过测量与估测养成用定量的方法解决现实问题的习惯。研究发现，根据小学生认知发展的规律，量感可分为感性的量感、理性的量感与辨析的量感三个依次递进的水平。其内涵分为量的感性体验、量的理性感知、量的测量判断、量的合理辨析、量的单位转换与量的计算应用六部分，具有直观性、参照性、经验性、转换性与近似性五大特征。在教学中，教师可以直观性为切点，提供量感发展的支持；以参照性为抓手，把控量感发展的准度；以经验性为驱动，增强量感发展的动力；以转换性为拓展，构建量感发展的联系；以近似性为帮手，降低量感发展的难度。

【关键词】小学数学；量感；数感；义务教育数学课程标准（2022年版）

研究表明，小学阶段学生初步用数学的思想思考现实问题是基于量感的，表现在认识到量是学生具体可感知的数学背景^[1]，例如小学生对自然数的认知是基于数个数，借助于数量的感知而来^[2]。认识到几乎所有度量单位的产生和发展都经历了漫长的过程，承载了度量单位由多元到统一，由粗略到精细的发展历程^[3]。综上所述，结合我国小学阶段量感教学的现状，《义务教育数学课程标准（2022年版）》（以下简称“新课标”）明确增加了量感作为数学核心素养的表现之一。量感的培养，对于学生理解量的概念、体会量的大小有重要的作用，同时也可以提高学生的估算、估测能力。对量感的内涵与特征的研究可助力于教师把握量感本质从而制定培养策略。

一、量感的内涵

（一）量感的界定

对量感的解释主要有以下几种代表性观点：一是指通过视觉和触觉对物体的大小、速度等方面的感觉，是对于物体物理量的最感性的认识。量感是一

种思维直觉，也是一种“量”的直接反馈。二是将量感作为数感的下属观点，该观点是将量感作为数感表现的一部分。三是认为“量感”指的是学生在实际情境中主动地、自觉地理解和运用“量”的态度和意识。它是一种对“量”的直觉，对“量”的敏感性，对“量”的直接反映，是指不使用测量工具对某个量的大小进行推断，或推断用某个单位表示的量与哪个实际物体的大小相吻合的一种感觉^[4]。四是将量感看作是基于本能的观察与行动方式^[5]。David Wagner、Brent Davis等人认为人类出生后就具备对数量和距离的感知能力。五是将量感看作是从数学的视角通过数量关系、图形关系抽象出数学本质的能力。PISA2021对数学素养的定义强调情境的真实性，强调对复杂现实生活的应变能力以及问题解决能力，凸显数学的应用价值^[6]。

综上，量感主要指对事物的可测量属性以及大小关系的直观感知，知道度量的意义，能够理解统一度量单位的必要性，会对真实的情境选择合适的度

量单位进行度量,会在同一度量方法下进行不同单位的换算;初步感受度量工具和方法引起的误差,能合理得到或估计度量的结果.建立量感有助于养成用定量的方法认识 and 解决问题的习惯,是形成抽象能力和数学应用意识的基础^[7].

(二)量感内涵表征

研究认为量感的内涵包括量的感性体验、量的理性感知、量的测量判断、量的合理辨析、量的单位转换、量的计算应用六个部分.

量的感性体验是指通过自身经验定性解决量感问题.感性体验是学生对外界物理量感知的起始环节,是形成量感的必要组成部分,也是量感发展的基础.量的理性感知是指通过数量感在不同物理意义的迁移,从而理性感知与表达目标的大小,是学生量感趋向于理性的思维方式,因此理性感知是对感性体验标准化的过程.量的测量判断是指根据量的物理含义采取合理的工具进行测量与估测,并分析其误差,表现为学生可以选择合理的测量工具进行测量认知,可以通过测量验证自身估测的结果是否准确.量的合理辨析是指能够理清不同维度物理量的区别与联系,有助于学生量感的分化与发展,增强学生用联系的眼光看待问题的能力,特别是对动态物理量(如速度)以及易混淆物理量(如长度与面积)的感知与理解,是学生量感趋于灵活的关键.量的单位转换是指可以根据客观现实进行单位换算,单位的合理选择可以增加量感的准确性,同时降低量感的感知难度.量的计算应用是指借助简单的估算与心算扩展学生估测的范围.

理清量感内涵的表征方式有助于理清其边界.首先,量感是人类特有的能力,小学生可以借助量感形成质量、长度、面积等物理量的概念,进而进行测量与估测,并作出归纳与演绎.再者,量感的对象是可测量的,是真实存在的客观事物或是理想的标准模型,单纯的数字不能称为量感,例如使用尺子可以测量书本的长度为20厘米,但无法直接测量数字“20”.最后,量感的运算是可视化的,表现为量感的计算是有现实意义的,每一步的求解都有一定的物理含义,量感不可以去掉后面的单位,单纯的数学运

算不能称之为量感,例如根据圆的面积公式 $S = \pi r^2$ 估测圆的面积,实际上是通过圆的面积与其半径的客观联系进行估算的,以可视化的方式被学生感知,因此属于量感.借助可视化计算可以扩充量感的感知范围,降低量感的感知难度.量感问题可划分为数量感问题,例如对个数的感知;知觉感问题,例如对温度、时间、重量的感知;空间感问题,例如一维的长度感知、二维的面积感知、三维的体积感知.

(三)量感解决模式

皮亚杰认为,小学阶段学生认知发展正处于具体运算阶段,表现为可以依据具体实物进行适当的抽象与推理.吴念阳等人认为,具有较强空间意识的儿童在中小学数学学习中往往有更出色的表现^[8].因此小学生量感具备发展的可能性.研究表明学生量感水平的表现涉及思维、操作、表达三个维度.其量感按照发展阶段由低到高可以归纳为:感性的量感、理性的量感、辨析的量感.感性的量感阶段,学生思维上体现出对物理量大小的判断是基于生活经验的,就操作而言能够借助身体部位定性测量物理量,尚未形成标准的测量方法与估测意识,就表达而言不会使用“数字+度量单位”的方式规范表达量感结果,具有明显的个体差异性与非标准性;理性的量感阶段,学生具有一定的数学思想与理性思维,能够将数学方法融入到测量与估测之中,可以使用规范的测量工具进行目标物理量的测量,进而可以使用“数字+度量单位”的方式规范表达量感结果,具有一定的标准性与严谨性;辨析的量感阶段,学生具有一定的辩证思维,能够用联系的眼光看待世界,可以理清不同维度量感之间的区别与联系,能够结合选用不同的测量工具进行复杂测量,并根据物理量的客观联系进行合理估测,进而严谨表达一个系统中的量感结果并说明其中的关系,具有分化性、整体性、创造性.

量感解决问题的模式可以归纳为:借助于生活经验形成感性的量感,通过量的感性体验可以用大小、快慢等语言初步表达量感结果,该阶段的量感更多的保留了本能的色彩,是对所见所闻笼统进行表达.此时学生对物理量产生了初步认识,借助感性的

量感定性解决问题,这种量感结果多是通过感官刺激形成的简单认知,如感知正常行驶中的汽车比自行车要快,虽不精确但却是量感生长的基础.在感性经验的基础上,学生借助量的理性感知将感性的量感升华为理性的量感,通过量的测量判断、量的单位转换、量的计算应用可以用“数字+度量单位”的方式科学表达单一物理量的感知结果.理性量感的形成更多依赖于学生在学校中接受的数学教育,其关键在于学生领悟如何借助度量单位感知、思考、表述自身的量感结果.此时学生可合理使用测量工具进行目标物理量的测量或估测,通过单位换算找到最合理的输出结果.理性的量感局限性在于学生只能关注情境中单一维度的物理量,难以把握不同维度物理量之间的客观联系.在理性量感的基础上,借助于量的合理辨析、量的测量判断形成辨析的量感,通过量的单位转换、量的计算应用,学生可以用一个物体重量为1千克,且体积为1立方分米的方式综合表达多种物理量的量感结果.辨析的量感是学生量感的高级阶段,其形成依赖于课堂教学以及应用实践两方面,学生在具备理性的量感基础上通过多次练习以及解决实际问题从而逐渐发现物理量之间的联系,并在教师的指导下尝试用理性的量感去概括这种联系的本质,并尝试用联系的观点创造性解决情境中的量感问题.逐步理清不同维度物理量的区别与联系是理性量感进一步升华的方向.量感解决问题的模式如图1所示.

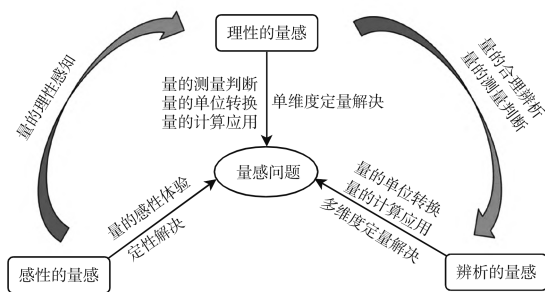


图1 借助量感解决问题的模式

二、量感的特征

依据量感的内涵,量感具有直观性、参照性、经验性、转换性、近似性五大特征.对量感特征的把握有助于教师找到教材中不同位置的量感内容之共

性,从而制定有针对性的量感教学策略.

(一)直观性

量感的直观性是指客观的物理量以外界刺激的方式被学生通过感官所感知,并在头脑中适当加工,形成长度、重量、体积等物理量本质概念的认识.胡塞尔认为,直观有两种不同的含义,感性直观与本质直观.量感的感性直观强调对外界真实环境的依赖,强调外界的物理量以刺激的形式被学生感知,并引起学生共鸣与思考,逐步将这种作用结果记忆在大脑中.通过多次感性直观的刺激,结合教师的合理引导,学生会将同一类刺激进行归纳,以知识、概念的形式保留量感对象的本质部分,例如长度、体积等,忽略其形状、颜色等其他无关因素,这便是量感本质直观的形成.究其根本,量感的直观性来源是可以被感知的实际物理量.

(二)参照性

量感的参照性是指将“参照一对比”的思想运用到量感之中,主要是以标准参照的方式展现.认识到每一个维度的物理量都有一个严格的标准量,以锚定单位的形式表达(如1厘米、1米),并通过标准量形成严谨的单位标准体系.标准参照是指将目标物理量与其标准量进行参照对比,借助测量与估测,从而产生目标大小是多少标准量的认知.学生在测量与估测物体具体长度的时候往往依靠量感的标准参照这一特征,将问题表征为目标物体的长度是几个长度标准量,形成理性的长度量感.在标准参照的基础上,量感的参照性还体现在不同物体在同一物理量之间的对比上,即借助于科学的单位体系对多个物体同一维度物理量进行辨别,其过程可以细化为首先借助量的理性感知确定多个物体需比较的相同目标物理量,之后借助于量的测量判断、量的单位转换以及量的计算应用测出必要的参数并进行单位换算以及计算应用,从而得到每一个物体目标物理量的量感结果.多物体相同物理量的参照比较原理仍是量的标准参照,只是在物体数量方面有所增加,表达方式与表征结果更加灵活.

(三)经验性

量感的经验性是指其表现出与现实生活紧密相

关的特征.这种经验源于学生日常生活,在学生理解的基础上借助日常反复的运用得到强化,从而形成快速的、合理的、定式的迁移并将这种感受存放在长时记忆中,具有表征快速、提取快速、不易遗忘等优点.经验来源于客观现实,这与量感的内涵高度吻合.可以看到人类对物理量具有本能的认知反应,在这种本能的基础上,人又具有两种特殊能力,即抽象能力和想象能力^[9].这两种能力表明量感不仅可以存在于个体经验中,也可以经过后天的数学学习与教学培养发展为科学严谨的理性感知.学生可以借助数学学习将经验的量感数学化、理性化.量感的经验性主要以感受—强化的方式展现,以课堂教学的形式规范化.感受—强化的方式即在形成一种量感后经过日常生活的强化作用,可以基本准确地快速进行量感结果表征,无须大量思考与运算,课堂教学的作用在于引导学生如何熟练将自身经验化的感性量感通过度量单位进行合理表达与使用.

(四) 转换性

施瓦布认为,向学生提出问题并给出材料,引导学生发现变量之间的关系是探究学习中重要的一部分^[10].量感的转换性是指某一个维度的量感不局限于特定的事物才能够表达,可以将表达同一维度物理量的不同物体进行等价的替换,或者将某一个维度的量感借助与其他维度量感的关系进行表征,从而制定策略简化问题,求得等价的结果.量感的转换性是量的合理辨析的一种外显形式,是学生借助量感灵活解决问题的关键特征,有两种表现方式:异类量转换与同类量转换.异类量转换是指对某一维度的量感,特别是动态量感的理解,借助于其他维度的量感进行等价的描述往往更清晰,例如学生往往将速度用单位时间内通过的距离来做异类量转换,借助于长度与时间的比值关系来理解,即单位时间内通过距离越长,那么速度越快,此时转换涉及多个物理量,强调量感认知的广度.同类量转换是指借助于同维度量感的不同客体,进行等价的替换,将无法直接测量与估测的情形转换为同维度下易于测量与估测的情形.此时转换涉及的物理量是同一个维度的,需要找到最佳转换物体从而解决问题.强调的是量

的合理辨析认知的深度,如采用排水法求不规则物体的体积便是量的同类量转换思想的体现.

(五) 近似性

近似性是指学生借助于量感解决问题的结果并非完美无缺的,这种结果的表征是在简化后的合理近似值,具有明显的非精确性.张奠宙先生认为中小学数学教学很难做到完全的严谨.一味追求严谨会让学习变得繁琐导致学生失去学习兴趣.因此忽略非必要因素可以节省思考与计算的成本,从而合理、快速得到量感的结果.量感的近似性实质是对量感问题中误差的处理方式,依靠量感的近似性解决问题需要对误差及其处理方法有一定的理解,理清哪些简化步骤可以作为误差处理,哪些简化步骤会导致结果错误,能够把握简化的度.量感的近似性有两种表现方式:过程近似与结果近似.过程近似是指学生在借助量感解决问题的过程中,选择性地忽略掉其中繁琐且对结果影响微小的非关键部分,此时量感的近似性表现为将对结果影响微小的部分视为误差.结果近似是指学生在通过量感表征问题结果时会对结果进行近似处理,忽略误差以及相比于最终结果影响很小的部分,从而通过近似值以便表达最终结果,如学生根据刻度尺对尺子刻度精度的下一位进行估读,如将9.03厘米简化为“9厘米左右”这样的表述作为结果进行表达.

三、量感的教学启示

(一) 以直观性为切点,提供量感发展的支撑

教师在实际教学过程中应该把握在教材中不同位置的量感内容的共性,就量感的来源而言,直观性是量感的一大特征.研究发现芬兰的教育认为学习的原始动机源于儿童对周遭事物的好奇心,而学生对“在地环境”的关怀和学习则是自我知识建构的起点^[11],因此直观性对量感教学极为重要.

(二) 以参照性为抓手,把控量感发展的准度

小学生量感的发展必然要从感性的量感发展为理性的量感,进而升华为辨析的量感.但度量单位对于学生而言是外来而陌生的,因此将度量单位与学生感性的量感产生联系是促进学生量感发展的关键一步.教师在量感教学过程中应该以量感的参照性

为抓手,引导学生理解度量单位标准量的概念,帮助学生使用这个标准量来表达自身感性的量感,借助于数字与单位标准量的组合形式规范培养学生量感,把控学生量感发展的准度。

(三)以经验性为驱动,增强量感发展的动力

小学生往往对自身熟悉的事物产生非常大的研究兴趣,而对完全陌生的事物表现冷漠。生活经验是学生日常生活的重要组成部分,对学生而言是十分熟悉的,学生的经验具有非标准性与个体差异性,但却是学生量感发展的基础。因此,教师应竭力帮助学生捕捉新旧知识的“联结”,抓住知识本质,利用经验的迁移解决问题。表现为以量感的经验性为驱动,增强学生量感发展的动力。教师应该在现有教科书的基础上通过有效的课堂互动,将情境问题与学生的兴趣及日常生活相关联,强调问题解决的现实意义。

(四)以转换性为拓展,构建量感发展的联系

教师借助转换思想可以启发学生认识到数量感、知觉感、方向感是存在一定关联的,借助转换思想可以针对性培养学生量的合理辨析能力,增加学生量感的灵活性。因此教师在教学过程中应以量感的转换性为拓展,帮助学生洞悉不同量感之间的联系,体现在学生遇到困难点可以灵活变通、转换问题表征、转变解决对策、用对立统一的观点认识不同的物理量。

(五)以近似性为帮手,降低量感发展的难度

量感的结果在一定误差范围内都是科学且合理的。因此近似处理是一种科学的补偿性措施。这种补偿措施可以大大降低量感问题的认知与解决难度,因此教师在教学过程中应以量感的近似性为帮手,降低学生量感发展的难度。体现在教师课堂中对误差的处理,教学不应局限于某一固定章节,而是作为一种思想渗透在不同的章节内容之中,从而逐步引导学生将复杂的量感问题通过近似性合理简化为易于解决的量感问题,降低学生的畏难情绪。

四、结语

厘清量感究竟是什么,从多角度深入剖析量感的内涵与特征,才能合理制定培养学生量感的具体措施。因此对量感的理解与把握要求准确,为教学

中落实量感的培养策略提供支持和保障,为学生未来数学学习、思维发展打下良好的基础,助力学生数学核心素养的发展。

参考文献:

- [1]马云鹏,史炳星.认识数感与发展数感[J].数学教育学报,2002,11(2):46.
- [2]祖丹,孔凡哲.数学必备品格的组成要素分析——基于数学家的视角[J].天津师范大学学报(基础教育版),2020,21(2):59.
- [3]娜仁格日乐,史宁中.度量单位的本质及小学数学教学[J].数学教育学报,2018,27(6):13.
- [4]梁培斌.小学数学量感可视化教学探索[J].教学与管理(小学版),2019(10):40.
- [5]WAGNER D, DAVIS B. Feeling Number: Grounding Number Sense in a Sense of Quantity[J]. Educational Studies in Mathematics, 2010, 74(1):39.
- [6]董连春,吴立宝,王立东. PISA2021 数学素养测评框架评介[J]. 数学教育学报, 2019, 28(4):6.
- [7]教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022:7.
- [8]吴念阳,安茜,毛依濛.不同积木游戏类型对幼儿空间能力的影响研究[J].天津师范大学学报(基础教育版),2019,20(2):84.
- [9]史宁中.试论教育的本原[J].教育研究,2009,30(8):3.
- [10]王文礼.从探究式教学到三维教学:美国科学教学重心的转移[J].比较教育学报,2021(4):164.
- [11]孙芙蓉,李子涵,史荣荣.芬兰中小学生学习实践教育发展:背景、特征及启示[J].比较教育学报,2021(5):100.

【作者简介】高博豪,天津师范大学教育学部硕士研究生(天津 300387);吴立宝(通讯作者),天津师范大学教育学部教授,博士生导师;郭衍,北京师范大学数学科学学院副教授,博士生导师(北京 100875)。

【原文出处】摘自《天津师范大学学报》:基础教育版,2022.5.7~12

【基金项目】天津市教育科学规划重点课题“小学生综合素质评价研究”(BHE210014)。