

【学科视点】

中国 HPM 研究内容与方法

余庆纯 汪晓勤

【摘要】数学史与数学教育(HPM)是一个方兴未艾的国际学术研究领域,受到中国数学史界、数学教育界的普遍关注.中国 HPM 研究内容主要有 HPM 理论研究、教育取向的数学史研究、历史相似性的实证研究、数学史融入数学教材研究、数学史融入教学研究、HPM 与教师专业发展、HPM 与 ICT 研究等 7 个主题.研究方法主要包括历史研究、行动研究、调查研究、个案研究、实验研究等.新时代 HPM 专业学习共同体需要深挖数学文化,彰显数理人文;夯实理论基础,加强实证研究;扎根中国特色,增进国际交流.

【关键词】HPM;研究内容;HPM 理论;研究方法;实证研究;中国特色

数学史与数学教育(relations between the history and pedagogy of mathematics,简称 HPM)是重要的国际学术研究领域之一^[1].1972 年,在英国举行的第二届国际数学教育大会(ICME-2)上,初步组建了数学史与数学教学关系国际研究小组^[2].1976 年,该研究小组正式隶属于国际数学教育委员会(ICMI).1980 年,北美、英国等部分地区陆续出版了 HPM 相关的通讯.1984 年,在第五届国际数学教育大会(ICME-5)上,首次将不同地域性的 HPM 通讯刊物整合为统一的国际性刊物《HPM 通讯》(HPM Newsletter),收录国际 HPM 研究成果,交流学术发展动态.国际 HPM 研究已受到欧美数学家、数学史家与数学教育家们的高度关注,学者们普遍认为数学史在认识数学本质、探析学习障碍、激发学习动机、涵养数理人文、助力教师发展等方面具有独特的教育价值^[1].

20 世纪末,国际 HPM 逐渐传入中国.然而,早在 20 世纪初,中国数学史与数学教育研究已开始萌芽.20 世纪 30 年代至今,中国数学史与数学教育研究经历了“萌芽探索—整合发展—改革提升—融合赋能”4 个历史阶段,逐渐从“为历史而历史”演进成“为教育而历史”.当前,中国 HPM 研究领域蓬勃发展,方兴未艾.

2021 年,正值第 14 届国际数学教育大会(ICME-14)顺利举办,中国数学会数学史分会成立 40 周年之

际,回顾中国数学史与数学教育的发展历程,溯源 HPM 研究内容与方法,尝试回答数学史与数学教育研究者们共同关注的问题:(1)中国 HPM 研究的发展历程如何?(2)中国 HPM 研究的主要内容及其研究方法是什么?研究者旨在总结中国特色 HPM 研究经验,以史为镜,古为今用,为更好地融合数学史与数学教育、加强 HPM 教学实证等方面提供理论支撑与实践参考.

一、历史源流

20 世纪 30 年代至今,中国 HPM 研究经历了 4 个历史阶段,相继呈现了数学史与数学教育之间的 4 类互动关系.

(1)萌芽探索阶段(1930—1984).20 世纪 30 年代至 80 年代初期,以著名数学史家李俨(1892—1963)、钱宝琮(1892—1974)两位先生领衔的中国数学史研究团队兢兢业业、攻坚克难,通过考古发现与史料挖掘,系统地构建了中国数学史研究的理论体系,开创了现代中国数学史研究的基本范式,奠定了中国古代传统数学在人类文化史上的重要地位.两位先生不仅是中国现代数学史乃至整个科学史研究的开创者和奠基人,更是中国数学史与数学教育研究的开创者和启蒙者^[3].从 20 世纪 50 年代起,数学史家们逐渐关注数学史的教育研究.当时,中国高等院校数学史教育聚焦在各类师范院校、个别大专院校数学系开设的数学史课程,一方面是

为了践行爱国主义教育,培育新一代从事数学史研究的优质人才;另一方面是促进国内数学史教材编撰与修订工作,推动中国数学史研究事业的不断发展^[3]。当时,在深厚的中国数学史研究土壤中,高等教育阶段的数学史教育研究悄然萌芽,在“筚路蓝缕”的探索初期中缓慢发展。此时高等院校普遍关注“为数学而数学史”或“为历史而数学史”。此后,越来越多的研究者们关注到教育取向的数学史研究,在“为历史而数学史”基础性研究的积淀上,逐步转向“为教育而历史”。

(2)整合发展阶段(1985—1999)。20世纪80年代至20世纪末,开启数学史与数学教育的“整合发展”阶段。据统计,1986年,中国约有四十所高校数学系开设了数学史选修课程,到2001年全国大多数高等院校已普遍开设数学史选修课程^[3]。著名数学史家、当代教育名家张奠宙(1933—2018)的《20世纪数学史话》(后修订为《20世纪数学经纬》)^[4-5]与著名数学史专家李文林的《数学史教程》(后再版为《数学史概论》)^[6-7]两本数学史教育的经典教材令人印象深刻,都曾经经历过反复打磨与修订,成为20世纪世界近现代数学史研究、中国当代数学史教育研究璀璨星空中的闪闪明星。20世纪70年代至21世纪初,中国科学院吴文俊院士(1919—2017)深耕于数学史研究领域,在“两条主流”“古证复原”“古为今用”“丝路精神”4个方面均有出色的研究贡献,成为自主创新的典范,引领继李俨、钱宝琮先生之后的中国数学史研究的新局面^[8]。其中,“两条主流”是指吴文俊正确地厘清世界数学发展的两条主要脉络,即以《九章算术》为代表的中国古代数学机械化算法与以《几何原本》为代表的数学公理化演绎体系曾多次反复、互为消长,交替成为世界数学发展中的主流^[9]。这一研究具有正本清源的重要价值。“古证复原”强调两项基本原则:所有研究结论应该在幸存至今的原著基础上得出;所有结论应该利用古人当时的知识、辅助工具和惯用的推理方法得出^[10-11]。“古为今用”是吴文俊在1980年谈及“中国传统数学的再认识”时提出的,显示中国古算的真实面貌不仅是为了破除对西算的盲从,更是端正对中算的认识,旨在古为今用^[12]。他后来提出中国古代数学具有机械化、构造化两大鲜明特点^[13],并将“古为

今用”的原则贯穿到数学史、数学机械化研究的全过程,影响深远。“丝路精神”是指中国古代数学家们通过“丝绸之路”与中亚甚至欧洲的同行们进行活跃的学术交流,展现出世界多元数学文化的和谐共存、互通互融的本质。吴文俊将中外数学交流的意义升华到“丝路精神”,指出知识交流与文化融合应当继续得到更好的发扬^[14]。在1984年全国高校中外数学史讲习班上,吴文俊先生曾高屋建瓴地指出:数学教育与数学史是分不开的,鼓励全国各所高等院校普及中西方数学史教育。后来,全国数十所高等院校陆续开设数学史课程,普及数学史知识。当时,“数学史与数学教育”已成为高校数学学科六大主干专业之一,“学习数学史”也被写进中小学数学教学大纲与教材^[15]。20世纪末,在中国基础教育阶段的数学教材建设、课程改革等方面,吴文俊院士阐述了数学史与数学教育相互整合、相互促进的密切关系^[16]。20世纪80年代至20世纪末,数学史与数学教育进入“整合发展”阶段,从“为历史而历史”转变成“为(高等)教育而历史”,逐渐关注数学史融入数学教育的必要性。

(3)改革提升阶段(2000—2017)。21世纪初,中国基础教育数学课程进行新一轮改革,助推“数学文化”融入新课程、新教材与新教学,兴起“为(基础)教育而数学史”的热潮。2002年,张奠宙在《数学教学》期刊上创办“数学史与数学教育”栏目,提出“弘扬数学文化,促进数学教育”的宗旨,指出要借鉴数学史科学地解释:学生如何理解数学、教师如何将数学史融入教学、数学史与数学教育如何互动、如何分析多样化的文化、社会、经济等因素^[17]。2003年,《普通高中数学课堂标准(实验)》建议在高中数学课程中,要适当地提出对“数学文化”的学习要求,设立“数学史选讲”等专题^[18]。后来,李文林加入《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》修订组,关注数学史、数学文化融入义务教育阶段数学课程、教材、教学等方面,成为数学史研究进入数学教育领域的一个标志性事件^[19]。

2005年,第一届全国数学史与数学教育学术研讨会(CHPM-1)在西北大学召开,HPM逐渐受到中国大陆教育界的热切关注。2006年,围绕“教育取向的数学史研究”“基于数学史的数学教学设计”“关

于历史发生原理的实证研究”“数学史融入数学教学的实验研究”等主题内容,汪晓勤、张小明翔实地阐述如何运用历史研究、课例研究等方法开展 HPM 研究^[20]。从 2010 年开始,上海、浙江等地陆续成立 HPM 初中、高中教学研究基地,开展数学史融入数学教学研究,致力于借鉴数学史来溯源数学知识的发生发展历程,再现数学家火热的数学思想方法,展现数学文化中的理性人文。2011 年,在第四届数学史与数学教育学术研讨会(CHPM-4)上,张奠宙先生再次积极提议:立足教育实践,开发系列 HPM 教学案例。后来,中国基础教育阶段持续开展数学史融入数学教学的改革实践,旨在协调数学史与数学教育之间的关系,发挥数学史多元的教育价值。

(4) 融合赋能阶段(2018—今)。随着“互联网+教育”的蓬勃发展,数学史与数学教育研究逐渐转入“融合赋能”的历史新阶段,聚焦“为教育(实证)而历史”。2018 年伊始,全国加强教育实证研究,推进研究范式转型。2018 年 3 月,上海市“立德树人”数学教育教学研究基地成立数学史与数学教育(HPM)工作室,组建小学、初中、高中学段的 HPM 专业研究团队,致力于发展五个“一”,即一个 HPM 研究领域、一个 HPM 研究视角、一个 HPM 专业学习共同体、一条 HPM 课例研究专业路径、一批 HPM 教学案例。此时,全国各地 HPM 课例研究活动正在如火如荼地开展,呈现出一派繁荣发展的生机景象。2018 年起,各种 HPM 会议相继举办,呈现频率高、规模大、形式多的会议新模态,推动 HPM 研究迈上新的台阶。2018 年 5 月,在台湾师范大学举行“台北—上海 HPM 数学史与教学双城论坛会议”,台湾的洪万生、刘柏宏、苏意雯与上海的汪晓勤、黄友初等围绕教育取向的数学史研究、数学史融入数学教科书研究、数学史融入数学教学研究、HPM 与教师专业发展等主题展开深入探讨。2018 年 7 月,第八届数学教育中的历史与认识论欧洲暑期大学在挪威奥斯陆城市大学举行^[21]。同年 10 月,第三届华人数学教育大会(简称 CCME-3)在华东师范大学举行,“数学史与数学教育”是其中一个重要的分论坛^[22]。2019 年 5 月,在上海交通大学举办第十届中国数学会数学史分会学术年会暨第八届全国数学史与数学教育学术研讨会^[23],展现出新时期数学史与数学教育的深度融合、相互促进。

动态循环的紧密关系,深化基础教育阶段 HPM 理论与实践研究,推进中国特色 HPM 研究的国际化发展。2020 年初,受全球新冠肺炎疫情的影响,全国实施“停课不停学”教育举措,上海 HPM 工作室成立高中、初中、小学 3 个学段“全国 HPM 教师网络研修班”,助力各省市数学教师开展跨区实时、异地同步的网络化交流,保障全国 HPM 教学的稳步推进,开启“HPM 云教育时代”。

中国 HPM 研究经历多年“为教育而历史”的艰辛探索与创新发展,已成为中国数学教育的重要研究领域之一。当前,国内 HPM 研究方兴未艾,朝着理论研究多元化、教育实践实证化、技术赋能高效化的新趋势蓬勃发展。

二、内容方法

一般而言,教育研究分为思辨研究、实证研究两类,前者聚焦教育“应然”的问题,后者解决教育“实然”的问题。21 世纪以来,实证研究(empirical research)一直是国际数学教育研究的主流趋势。作为国际数学教育知名学术研究期刊《数学教育研究杂志》(Journal for Research in Mathematics Education,简称 JRME)的主编,蔡金法曾深入地论述开展高质量数学教育实证研究的价值意义与实践路径,指出研究内容、研究问题决定研究方法^[24]。可见,单一地讨论不同研究方法的优劣没有实质性意义,需要聚焦具体的研究内容、问题等,选择具体有效的研究方法。这才是开展数学教育实证研究的核心要义。

鉴于此,溯源 21 世纪以来中国 HPM 研究的发展历程,发现 HPM 研究的主要内容可以分为 HPM 理论研究、教育取向的数学史研究、历史相似性的实证研究、数学史融入教材研究、数学史融入教学研究、HPM 与教师专业发展、HPM 与 ICT 研究 7 个主题,聚焦历史研究、行动研究、调查研究、个案研究、实验研究等实证研究方法。

(一) HPM 理论研究

HPM 理论研究,往往运用历史研究、行动研究与调查研究等综合方法,秉承“上通理论、下达实践”的研究理念,聚焦理论体系与实践经验的本土化,关注“为何”与“如何”运用数学史等“应然”问题。当前,高校 HPM 研究者与一线数学教师组成的专业学习共同体(professional learning community,简称 PLC)基

于中国“本土化”的数学教育国情,扎根理论研究与教学实践,总结了具有中国特色的 HPM 研究理论,即“一个视角、两座桥梁、三维目标、四种方式、五项原则、六类价值”^[1,25]。

“一个视角”,是指 HPM 视角,即数学史与数学教育关系的视角。

“两座桥梁”,是指 HPM 研究建构“历史与现实、数学与人文”两座桥梁。前者协调了历史序、逻辑序与认知序,展现数学史古今相连、古为今用;后者将数学的学术形态转化为教育形态,使数学教育浸润人文芬芳。两座桥梁交相辉映,共同保障数学教育生态的有机统一^[25]。

“三维目标”,是指教师专业发展的 3 个维度,即知识、能力与信念。知识方面,借鉴教学取向的数学知识(mathematical knowledge for teaching,简称 MKT)理论框架^[26],对教师学科内容知识与教学内容知识等进行测评。能力方面,关注教师 HPM 课例设计能力、信息化 HPM 教学实践能力等。信念方面,指教师对数学、数学教学的价值观念,具体表现为动态数学观、数学实用观、理性精神等。

“四种方式”,是指数学史融入数学教学的 4 种方式,即附加式、复制式、顺应式与重构式(见表 1)^[25]。在基础教育阶段中,数学史融入数学教学的方式是多元的。若简单地采用附加式,则容易出现低水平的教学效果;若综合运用多种方式,则有助于提高教学质量。可见,选择合理的数学史融入方式,是开展 HPM 教学的关键要素。

表 1 数学史融入数学教学的方式

运用方式	内涵界定
附加式	展现相关的历史素材或数学家图片,介绍某个数学主题的历史发展,讲述数学故事等,去掉后对教学内容没有影响
复制式	直接采用历史上数学的概念与术语、命题与证明、问题与求解等内容
顺应式	对历史上的数学问题、思想方法进行教育取向的史料改编或根据历史素材创设问题情境、编制数学问题等
重构式	借鉴历史,基于“历史序—逻辑序—认知序”,重构知识的发生、演进过程,促使融入数学史的数学教学自然而然

“五项原则”,是指选取数学史料的 5 项原则,即科学性、可学性、有效性、趣味性与人文性(见表 2),聚焦史料选取的重要性与必要性,彰显 HPM 教学特色^[25]。

表 2 选取数学史料的原则

融入原则	具体要求
科学性	数学史素材的出处明晰,史料运用科学客观,符合史实
可学性	以“学生为本”,融入的数学史料接近学生的“最近发展区”,易于学生理解与运用
有效性	选取的史料对学生理解数学、运用数学等方面有所帮助
趣味性	选取的史料蕴含美学标准、智力好奇、趣味娱乐等因素,能够激发学生学习的兴趣与求知欲
人文性	选取的史料还原数学的火热思考、理性追求等人文风貌,展示多元的数学文化

“六类价值”,是指数学史融入数学教学可以构建知识之谐,彰显方法之美,营造探究之乐,实现能力之助,展现文化之魅,达成德育之效。实践表明,HPM 教学在不同程度上彰显出数学史的 6 类教育价值^[27]。此外,对于数学史、数学文化与数学教育的相关研究,许多学者都曾做过理论探讨。黄秦安指出,数学文化研究为透视数学与数学教育提供了更加广阔的视角,进一步从数学与数学教育观、大众文化、民族与传统文化、数学的社会与历史研究、科学文化与人文文化等研究主题,探讨了数学文化的相关研究^[28]。代钦指出了数学文化的概念及其 4 种表现形态,即纯粹数学形态、学校数学形态、应用数学形态与民族数学形态,归纳了数学文化的 5 个重要特征,即规范特征、审美特征、认知特征、历史特征与价值特征^[29]。杨豫晖、吴姣、宋乃庆总结国内已有的数学文化研究,提出了数学文化的概念及其重要的教育价值^[30]。此外,余庆纯、汪晓勤提出基于数学史的数学文化研究聚焦知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐与多元文化的内涵维度^[31]。

(二)教育取向的数学史研究

教育取向的数学史研究,是指对不同主题的数学史料进行教育性的解析研究,旨在以史为镜,服务

教育. 研究者往往基于古今中外的原始文献、二手文献等进行系统深入的历史研究, 一般基于文本分析法, 开展不同类型的编码与分析.

扎根原始文献、指向教育教学的历史研究是 HPM 研究的基石, 与“为历史而历史”的史学研究不同, 教育取向的数学史研究聚焦“为教育而历史”, 特别关注基础教育阶段数学史的挖掘与解析. 教育取向的数学史研究关注数与代数、图形与几何、概率与统计等主题领域, 聚焦数学概念术语、定理命题、思想方法、历史名题等内容. 历史研究, 如素数与合数、倾斜角与斜率、众数等概念, 平方差公式、圆的面积公式、勾股定理等公式定理, 《九章算术》《海岛算经》等古代算经中的趣味历史名题等内容^[1]. 数学史是一座巨大的宝库, 蕴含丰富多彩的数学教学资源与思想养料, 促进基于数学史的数学文化史料挖掘与内涵解析, 不仅解答了学生关于“无理数是没有道理的数吗?”“未知数为何称为‘元’?”“函数是如何来的?”等数学知识来龙去脉的疑问, 而且帮助教师走出“巧妇难为无米之炊”的教学困境, 提升数学教学质量.

(三) 历史相似性的实证研究

20 世纪, HPM 先驱者卡约黎 (F. Cajori)、史密斯 (D. E. Smith) 等西方学者普遍认可“历史相似性”, 认为个体在学习新知的认知过程与历史上相关的学科创建者所经历的探索发现与认知障碍相似^[2]. 近些年来, 中国 HPM 研究团队基于历史研究、调查研究等方法, 实证“历史相似性”的客观存在. 研究者往往基于教育取向的历史研究, 采用抽样调查的方式, 调查学生在数学学习过程中的探索发现与认知发展是何、为何存在历史相似性. 此外, 参照“历史相似性”, 研究者进一步评估或预测学生数学学习的认知变化, 帮助学生有效地跨越认知障碍, 提高数学学习的效率, 提升学好数学的自信心.

现以高中、初中阶段的“历史相似性”研究为例, 加以阐述说明. 在高中阶段, 对于“切线”概念的理解一直是教学难点, 在—项比较研究中发现: 苏、沪、皖 3 地绝大多数高中生对“切线”的理解停留在古典几何阶段, 需要依据公共点个数来判别是否为切线, 这与古希腊数学家的理解相似, 且学生对切线从“静态直观定义”到“动态分析定义”的过渡仍存在理解困

难, 表现出高度的历史相似性^[32]. 在初中阶段, —项“字母表示数”的调查研究实证了学生理解“字母”的意义具有历史相似性. 该研究基于代数学发展的 3 个阶段“修辞代数—缩略代数—符号代数”进行测评, 发现不少学生停留在“修辞代数”与“缩略代数”阶段, 理解字母的本质仍处于“记数符号”“表示未知量”等层次, 对“符号代数”的理解仍存在认知障碍^[33]. 有研究者基于“历史相似性”开展“字母表示数”教学, 其借助“问题串”的形式, 重构式地亲历代数学发展的 3 个阶段, 由浅入深地引导学生体会字母表示未知数、已知数的阶段性变化, 跨越认知障碍, 培育动态数学观^[34]. 可见, “历史相似性”的实证研究具有重要意义, 不仅能够清晰地还原数学演进的变化历程, 深刻地揭示火热的历史动因, 而且可以有效地解决学生学习数学的认知障碍, 为数学教学改革提供宝贵的历史经验.

(四) 数学史融入教材研究

随着 21 世纪课程改革的不断推进, 数学史融入教材的重要性日益凸显, “为何”与“如何”将数学史融入教材逐渐成为重要的研究话题. 教材中运用数学史能够直接为教学提供史料素材, 改变“无米之炊”的教育现状. 在数学史融入数学教材研究中, 常见运用调查研究、实验研究等研究方法开展 3 个方向的研究: (1) 数学史融入数学教材的理论探讨, 如数学史融入教材常见有 5 种方式 (见下页表 3), 点缀式与附加式常见独立于教材的正文内容, 删去后无较大影响, 而复制式、顺应式与重构式展现出数学史融入教材的多元方式, 融合程度逐渐自然而然; (2) 数学教材的比较研究, 采用文本分析法对国内外同一版本或不同版本教材中数学史的选取原则、内容分布、呈现方式等进行比较研究, 如运用数学史融入教材的 5 种方式与融入水平的分析框架, 对中、法两国初中数学教科书进行分析研究, 发现中国教科书中数学史已融入正文各环节, 且复制式或顺应式地融合历史名题, 而法国教科书在重构式地运用史料方面尚且不足^[35]; (3) 数学教材的互动研究, 运用问卷调查、深度访谈等方法, 聚焦使用者与教材中数学史编排内容、融入方式等的有机交互.

(五) 数学史融入教学研究

数学家、数学教育家克莱因 (M. Kline, 1908—1992) 指出“数学史是教学的指南”. 数学史融入数学

表3 数学史融入教材的方式

融入方式	概念内涵	教材位置	教育价值
点缀式	数学史料的相关绘图插图、摄影作品等,与正文内容无直接依存关系,如数学家画像等	章头章尾、正文旁注等	图文并茂,引出主题
附加式	数学史料的相关阐释性文本,对正文内容起到补充说明的作用,如人物事件的简介、概念术语的专题历史等	章头章尾、例题练习、阅读材料等	创设情境,阐释说明
复制式	直接采用历史上的数学问题(如历史名题)、定理解法、思想方法等	探究新知、例题练习等	古今联系,提出问题,再现思想,促进探究
顺应式	改编历史上的数学问题或借鉴历史编纂新数学问题(如改编历史名题),优化数学思想方法等	探究新知、例题练习等	古为今用,优化问题,推陈出新,顺应学习
重构式	借鉴发生法,基于“历史序—逻辑序—认知序”重构教学内容	探究新知、知识脉络等	追本溯源,重构学习,水到渠成,自然而然

教学,是指借鉴“历史发生原理”,以学生喜闻乐见的形式呈现数学知识的来龙去脉、再现历史上的数学思想方法、渗透丰富多彩的数理人文的教学方式,是“有温度的数学教学”.张奠宙先生曾指出,在教学实践中要用数学史内容揭示数学文化内涵,营造数学文化氛围^[1].数学史融入数学教学,常常分为显性融入、隐性融入两种形式.显性融入是指融合数学相关的人物事件、概念公式、定理命题、历史名题等显著的史料内容,一般以附加式或复制式的方式融入数学教学;隐性融入是指依据教学实际对史料内容进行重新设计与加工,常见以顺应式或重构式的方式融入教学.因数学史融入数学教学的深度不同,HPM教学也呈现出不同层次.洪万生教授曾指出教师应用数学史至少可以分为3个层次:(1)“讲故事”的形式,强调对教学内容起到佐证、补充与拓展的作用;(2)聚焦知识源流,强调认识数学知识背后的历史脉络,比较数学家的不同方法,拓

宽认知视野,培养理性思维;(3)注重多元文化,在历史视角中关注数学活动的文化意义,实践多元文化关怀^[36].如何开展HPM教学实践呢?通常由高校HPM研究者与一线数学教师、教师教育者共同组建专业学习共同体,聚焦具体数学内容的来龙去脉,经历选题与准备、研讨与设计、实施与评价、整理与写作4个基本研究环节(见图1).该HPM教学过程形成的课例,简称为HPM课例^[1].

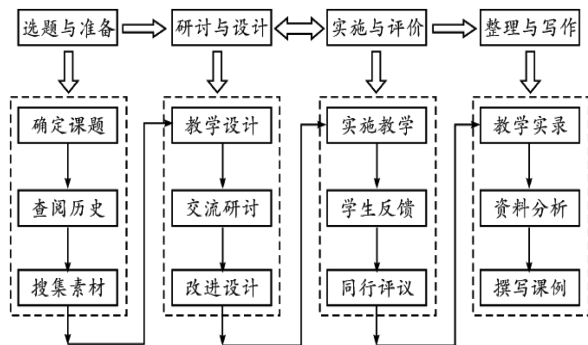


图1 HPM课例的研究流程

在数学史融入教学研究中,主要运用行动研究、调查研究、个案研究、实验研究等多元的研究方法.21世纪初,张小明曾基于“计划—行动—反馈—反思”的研究环节,开展中学数学教学中融入数学史的行动研究,总结出4个发现:一是选取的数学史材料宜做适度的筛选和剪裁;二是教学设计需考虑“历史序—逻辑序—认知序”的有机统一;三是数学史引入中学数学教学应以“融入”的方式为主;四是师生均可自主拓展学习数学史料^[37].2009年,张维忠与实验学校在长达2年合作研究过程中,通过行动研究建构“经验触动—数学化理解—多领域渗透—回顾反思”的数学文化教学模式^[38].2017年,在一项数学史融入统计概念教学的个案研究中,对6名学生学习前后的认知发展进行研究,发现5名学生认知水平得到明显提升,仅有1名学生的认知水平与原先持平,可见数学史融入统计教学有助于加强学生对统计概念的理解,促进学生的认知发展^[39].在一项HPM教学实验研究中,在初中、高中与高等教育阶段的3所不同学校中分别选择1位教师所教的2个基本条件相近的平行班(即实验班与对照班)开展教学实验研究,运用观察、问卷、考试等方式开展对应学段数学史融入教学的对比分析,发现数学史融入教学有3个显著的教学效果:听课时学生的精神状态显著改观,课堂教学效率明显提高,学习成

绩显著上升^[40]。随着数学教学改革的落实,HPM 专业学习共同体逐渐聚焦数学史融入具体数学主题的课例开发与运用,旨在改进 HPM 教学“高评价、低运用”的实践困局,优化学生数学学习,促进教师专业发展。

(六) HPM 与教师专业发展

数学史家钱宝琮先生曾提出:数学史研究的一个重要目标是为中学数学教师服务。中学数学教师要教好学生,不仅需要数学教学法,同时也应该知道数学发展史……数学教师具有广博的知识背景才能将数学课讲得更加生动、清晰和透彻,从而提高教学水平和教学质量^[41]。中国 HPM 专业学习共同体中,高校 HPM 研究者提供理论支撑,一线数学教师与教研员则提供实践智慧,二者共享学习、跨界互动,卓有成效地打通高等教育与基础教育之间的教育鸿沟,形成“中小学—大学”合作机制(school-university partnership mechanism,简称 SUPM),构建“理论与实践”路径(theory-practice approach),卓有成效地推进中国数学教师教育的持续发展^[42]。

HPM 与教师专业发展中,主要运用个案研究、行动研究等方法,开展数学教师知识、能力与信念等方面的研究。如一项个案研究刻画了初中数学教师在数学史融入教学后的系列转变:教师逐步提升对教材的批判能力,增强拓展教材的意识,对学生学习数学的认知规律有更加深刻的理解,教学研究能力显著提升,逐渐形成独特的教学风格……有力地证实 HPM 促进中学数学教师的专业发展^[43]。在研究 HPM 专业学习共同体时,以一个代表性的数学教师工作室及其 8 位成员教师作为个案研究对象,采用“设计研究为主、叙事研究与参与式行动研究为辅”的研究方法,通过课堂观摩、深度访谈与自评问卷等方式搜集数据,开展纵向追踪研究与横向比较研究,发现 HPM 教学设计研究助推教师学习,对教师观念与能力均有所提升^[44]。

(七) HPM 与 ICT 研究

随着“互联网+教育”时代的发展,HPM 与信息技术(information and communication technology,简称 ICT)研究成为一个新兴主题,聚焦 GeoGebra、几何画板、微视频等技术媒介融入 HPM 教学的内容特征、基本原则、运用方式与教育价值等。

中国 HPM 与 ICT 研究往往运用行动研究、调查研究等方法,聚焦 ICT 融入学生学习、教师教学与教

研等方面。在学习方面,ICT 承担课前导学、课中助学、课后拓学等重要角色,促进学生数学学习。常见运用微视频、几何画板、GeoGebra、希沃白板、思维导图、流转笔记、电子教材、电子档案袋等技术工具,辅助开展“以学生为本”的数学学习活动,生动地展示数学知识的来龙去脉,有趣地再现数学家探寻概念公式、定理命题等过程的火热思维,可视化地揭示化曲为直、以直代曲、数形结合等数学方法的本质,揭示数学思想的古今传承,彰显东西方数学文化的互通互融。在教学与教研方面,教师借助腾讯会议、钉钉等平台,搭建网络学习社区,运用腾讯文档、思维导图等技术工具呈现教学设计,开展线上研讨;以趣味生动的 HPM 微视频融入教学,揭示数学知识的发展历程,彰显数学文化之魅。

HPM 与 ICT 研究中,HPM 微课、HPM 微视频研究最为常见(见表 4)。其中,已有研究结合新版课程标准的内容要求与中小学微课评审标准,构建 HPM 微课研究框架,包含“分析—设计—制作—应用—评价”5 个环节^[45],常见于主题式、单元式的微课教学中。HPM 微视频则更多地运用于 HPM 课例,辅助学生数学学习。

表 4 HPM 微课与微视频的比较

研究对象	概念内涵	举例
HPM 微课	借鉴“历史发生原理”将古今中外数学概念定理、思想方法、问题解决等内容制作成生动的微视频(时长 10~15 分钟)来辅助教师教学或学生学习的课程资源	在高中阶段,采用行动研究开展 HPM 微课融入“两角和的正弦公式”主题教学,指出 HPM 微课的内容特征、基本原则与教育价值 ^[45]
HPM 微视频	运用于 HPM 课例教学中的短视频资源(时长 1~3 分钟),用于课前导学、课中辅学、课后拓学	在初中“锐角三角比”教学中,借助 HPM 微视频介绍锐角三角比与日晷的密切联系,进一步对学生学习 HPM 微视频进行问卷调查,学生均深刻体会到:日晷中运用锐角三角比等数学知识来测量时间、记录节气的重要价值 ^[46]

ICT 为 HPM 研究插上腾飞的翅膀,承载数学史从“学术形态”到“教育形态”的转变过程,展现数学演进历程,可视化数学思想方法,优化教学形式,提高教学效率,推动信息化 HPM 教学的历史性嬗变,彰显“互联网+HPM”的多元教育价值。

三、总结展望

HPM 研究横跨数学史与数学教育两大学科,是一个特色鲜明、前景广阔的国际学术领域。中国 HPM 研究关注 7 个主题的研究内容,聚焦多元的实证研究方法。进入 21 世纪以来,中国 HPM 研究领域蓬勃发展,一片欣欣向荣,逐渐呈现出扎根历史、跨界融合,上通理论、下达实践,聚焦实证、技术赋能的基本特征^[25]。未来,HPM 专业学习共同体需要致力于 3 个方面的深化工作。

(1) 深挖数学文化,彰显数理人文。数学史是数学文化的有机组成部分,蕴含数学文化的丰富内涵^[42]。张奠宙先生曾寄语“希望 HPM 会在未来的中国数学教育中有一个更大的发展,以至成为繁荣数学文化的一种教学常态”^[1]。对此,HPM 专业学习共同体需要加强教育取向的数学史研究,深挖“基于数学史的数学文化内涵”^[31],厘清数学学科内部的知识源流,寻找数学学科外部的跨学科本质关联,洞察数学的社会角色,品鉴数学的审美娱乐,展现古今中外的多元文化,彰显数学学科的数理人文底蕴,积极践行“立德树人”的根本任务。

(2) 夯实理论基础,加强实证研究。立足中国数学教育的基本国情,“自上而下”地构建、完善新时代中国特色的 HPM 理论体系,拓宽 HPM 研究主题,丰富 HPM 研究内容,同时也要聚焦 HPM 理论“自下而上”的研究路径,这是理论指导实践、实践涵养理论的关键要义。2017 年,“教育实证研究行动宣言”号召国内教育研究领域加强教育实证研究,推行研究范式转型^[47]。当前,中国 HPM 实证研究尚在初级阶段,存在很大的发展空间。囿于 HPM 教学实践的丰富性、内隐性与默化性,数学史许多深厚的教育价值未能在短期教学中很好地展现,且 HPM 研究中质性研究方法较多,量化研究相对较少,这是 HPM 研究的短板,亟待改善。未来,需要夯实 HPM 理论基础,借鉴相近学科领域的研究范式,助推 HPM 理论研究的不断发展。同时,加强实证研究方法规范,优化课例研究的循环周期。开展质性与量化研究相结合的

长期性、跟踪性的教育实证研究。

(3) 扎根中国特色,增进国际交流。第十四届国际数学教育大会(ICME-14)王建磐主席曾指出:“中国特色”的数学教育承载着落实“立德树人”根本任务、发展素养教育的时代使命,要勇于架起传统与发展的桥梁,站在优秀传统教育的肩膀上创新务实地发展^[48],这为中国 HPM 研究的未来发展指明了方向。在孕育“四基”“四能”的中国数学教育肥沃土壤中,架起了“历史与现实、数学与人文”两座桥梁,基于“历史相似性”的实证研究,开展“中国特色”的数学史融入数学教学实践,浸润学科德育,弘扬数学文化。在教育全球化的新时代中,传承中国传统数学、扎根中国特色、建立中国话语、对话中外研究、加强国际交流不仅是中国 HPM 研究国际化发展的必然趋势,更是中国数学教育屹立在东亚数学文化圈、国际数学教育圈的时代需求。

参考文献:

- [1] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 1.
- [2] 汪晓勤, 欧阳跃. HPM 的历史渊源[J]. 数学教育学报, 2003, 12(3): 24-27.
- [3] 傅海伦, 贾如鹏. 试析我国高校数学史教育发展及研究现状[J]. 高等理科教育, 2005(4): 9-11.
- [4] 张奠宙. 20 世纪数学史话[M]. 北京: 知识出版社, 1984: 1.
- [5] 张奠宙. 20 世纪数学经纬[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2002: i-ii, 427-434.
- [6] 李文林. 数学史教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 1.
- [7] 李文林. 数学史概论[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2011: 1.
- [8] 纪志刚, 徐泽林. 论吴文俊的数学史业绩[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2019: 1.
- [9] 李继闵. 《九章算术》及其刘徽注研究[M]. 西安: 陕西人民教育出版社, 1990: i-v.
- [10] 吴文俊. 中国数学史论文集(三)[M]. 济南: 山东教育出版社, 1987: 1-9.
- [11] 吴文俊, 王志健. 中国数学史的新研究[J]. 自然杂志, 1989, 12(7): 546-551, 560.
- [12] 吴文俊. 吴文俊论数学机械化[M]. 济南: 山东教育出版社, 1996: 30-44.

- [13] 吴文俊. 秦九韶与《数书九章》[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1987: 73-88.
- [14] 纪志刚. 吴文俊“丝路精神”及其对中外数学交流研究的意义[J]. 上海交通大学学报(哲学社会科学版), 2019, 27(1): 71-81.
- [15] 骆祖英. 吴文俊与中国数学史研究[J]. 中国科技史料, 1993(2): 59-65.
- [16] 吴文俊. 慎重地改革数学教育[J]. 数学教育学报, 2009, 18(2): 1.
- [17] 张奠宙. 创办前言[J]. 数学教学, 2002(3): 35.
- [18] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(实验)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2003: 1.
- [19] 李文林. 数学课程改革中的传统性与时代性——在第四届世界华人数学家大会中学数学教育论坛上的发言[J]. 数学通报, 2008, 47(1): 7-10.
- [20] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006, 15(1): 16-18.
- [21] 孙丹丹, 岳增成, 沈中宇, 等. 国际视野下的数学史与数学教育——“第八届数学教育中的历史与认识论欧洲暑期大学”综述[J]. 数学教育学报, 2018, 27(6): 92-97.
- [22] 余庆纯, 姜浩哲, 沈中宇. 第三届华人数学教育大会 HPM 分论坛综述[J]. 数学教学, 2019(4): 1-5.
- [23] 田春芝. 第十届中国数学会数学史分会学术年会暨第八届数学史与数学教育学术研讨会纪要[J]. 自然科学史研究, 2019, 38(2): 253-256.
- [24] 朱雁. 对话 JRME 主编蔡金法教授: 做实证的数学教育研究[J]. 数学教育学报, 2015, 24(6): 1-6.
- [25] 徐泽林. 与改革开放同行: 中国数学史事业 40 年[M]. 上海: 东华大学出版社, 2021: 258-286.
- [26] BALL D L. Content knowledge for teaching[J]. Journal of Teacher Education, 2008, 59(5): 389-407.
- [27] WANG X Q, WANG K. A categorization model for educational values of history of mathematics: An empirical study[J]. Science & Education, 2017(26): 1029-1052.
- [28] 黄秦安. 关于数学文化的若干重要相关研究领域——兼论如何进一步开展数学教育的文化研究[J]. 数学教育学报, 2007, 16(2): 4-7.
- [29] 代钦. 释数学文化[J]. 数学通报, 2013, 52(4): 1-4.
- [30] 杨豫晖, 吴姣, 宋乃庆. 中国数学文化研究述评[J]. 数学教育学报, 2015, 24(1): 87-90.
- [31] 余庆纯, 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵实证研究[J]. 数学教育学报, 2020, 29(3): 68-74.
- [32] 何百通, 汪晓勤. 高中生对切线的错误理解[J]. 数学教育学报, 2013, 22(6): 45-48.
- [33] 蒲淑萍, 汪晓勤. 学生对字母的理解: 历史相似性研究[J]. 数学教育学报, 2012, 21(3): 38-42.
- [34] 叶晓娟, 顾海萍. 基于历史相似性的“字母表示数”教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2014(10): 29-33.
- [35] 蒲淑萍, 汪晓勤. 数学史怎样融入数学教材: 以中、法初中数学教材为例[J]. 课程·教材·教法, 2012, 32(8): 63-68.
- [36] 张小明, 汪晓勤. HPM 的实践和若干启示[J]. 中学数学教学参考, 2006(1/2): 117-120.
- [37] 张小明, 汪晓勤. 中学数学教学中融入数学史的行动研究[J]. 数学教育学报, 2009, 18(4): 89-92.
- [38] 张维忠, 徐晓芳. 基于数学文化的教学模式构建[J]. 课程·教材·教法, 2009, 29(5): 47-50, 70.
- [39] 吴骏. 基于 HPM 教学的学生认知发展个案研究[J]. 数学教育学报, 2017, 26(2): 46-49, 91.
- [40] 高月琴, 薛红霞, 张岳洋, 等. 应用数学史知识的实验研究[J]. 太原师范学院学报(自然科学版), 2006(3): 36-38.
- [41] 钱永红. 钱宝琮先生的数学教育理念与实践[J]. 数学教育学报, 2010, 19(2): 8-10.
- [42] 余庆纯, 汪晓勤. 基于数学史的数学文化课例研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2021(1): 5-9.
- [43] 汪晓勤. HPM 与初中数学教师的专业发展——一个上海的案例[J]. 数学教育学报, 2013, 22(1): 18-22.
- [44] 蒲淑萍. HPM 与数学教师专业发展——以一个数学教育工作室为例[D]. 上海: 华东师范大学, 2013: 1.
- [45] 余庆纯, 汪晓勤. HPM 微课在和角公式教学中的应用[J]. 中学数学月刊, 2018(12): 33-36.
- [46] 王进敬, 余庆纯. 巧探古今生活, 浸润数学文化——以“锐角的三角比的意义”教学为例[J]. 中小学课堂教学研究, 2021(2): 5-10.
- [47] 教育实证研究华东师范大学行动宣言[J]. 全球教育展望, 2017, 46(3): 3-5.
- [48] 王建磐. 历史视角下的数学素养: 讲好我们自己的故事[J]. 数学教育学报, 2019, 28(3): 1.
- 【作者简介】** 余庆纯(1993-)女, 广州潮州人, 华东师范大学数学科学学院博士生, 主要从事数学史与数学教育研究(上海 200241); 汪晓勤, 华东师范大学教师教育学院(上海 200062).
- 【原文出处】** 摘自《数学教育学报》(津), 2022. 4. 49~55
- 【基金项目】** 上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目——数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究(A8).