

【学科视点】

我国数学核心素养研究新进展

——从“六核”观到“三会”观

刘祖希

【摘要】核心素养是2014年以来我国基础教育课程改革的热点问题。当前,以核心素养、学科育人为导向的基础教育课程体系(包括课程方案、课程标准、教材、高考评价体系等)已基本建立。数学核心素养的研究取得了从“六核”观到“三会”观的新进展,数学核心素养的概念体系基本形成。今后数学核心素养的研究工作应深化数学核心素养概念体系的科学架构、完善数学核心素养的测评方案、夯实数学核心素养的培养途径,充分发挥数学的学科价值与育人价值。

【关键词】数学核心素养;研究进展;六核;三会

核心素养是2014年以来我国基础教育课程改革的热点问题。当前,以核心素养、学科育人为导向的基础教育课程体系(包括课程方案、课程标准、教材、高考评价体系等)已基本建立,这以2017年版普通高中课程方案及各科课程标准、2019年版中国高考评价体系、2022年版义务教育课程方案及各科课程标准为标志。

具体到数学学科的核心素养,笔者曾在2016年撰文论述了我国数学核心素养的研究进展:从“数学素养”到“数学核心词”再到“数学核心素养”^[1],该文已被中国知网(CNKI)收录的文献引用150余次(截至2022年10月的统计数据)。经过6年的发展,我国数学核心素养的研究已从“六核”观进展到“三会”观,下面论述之。

一、数学核心素养的“六核”观

(一)“六核”观的内容概要

2017年12月颁布的《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称“2017年版课标”)指出:“学科核心素养是育人价值的集中体现,是学生通过学科学习而逐步形成的正确价值观念、必备品格和关键能力。数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的。数学学科核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。这些数学学科核心素养既相对独立、又相互交融,是一个有机的整体。”^[2]

这段引文不仅明确提出了数学核心素养的概念,界定了其内涵,还指出了其外延:数学抽象、逻辑

推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析^[3]。我们称之为数学核心素养的“六核”观。

至此,自2014年以来历时近3年的数学核心素养概念修成正果,基本平息了关于数学核心素养概念的争论。数学核心素养的这一概念包括几个要点:其一,它是数学课程目标的集中体现,这是其“课程”特征;其二,它是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,这是其“学科”和“素养”特征;其三,它是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的,这是其“形成”特征^[4]。

(二)“六核”观的由来探寻

2017年版课标修订组组长史宁中教授认为,数学基本思想(抽象、推理、模型)与数学“双基”“四基”、数学核心素养“六核”观都是一脉相承的,基于“四基”的数学教学就是基于数学核心素养的数学教学。相对于我们的数学教育传统,数学核心素养并没有另起炉灶,这也是我们一以贯之的事情。20世纪九十年代,我们国家的数学教学大纲是把数学思想和方法含在数学“双基”(基础知识、基本技能)里面的,大纲里有明确的表述;2011年版义务教育数学课程标准开始出现数学“四基”,是把“数学基本思想”从数学“双基”中单列出来,另加“数学基本活动经验”,这是对“双基”的继承与发展。数学核心素养“六核”观中的前三个就是数学基本思想,也是传承,后三个是传统的数学能力。据此,我们可以认为,“六核”观来源于数学基本思想,数学基本思想是数学核心素养“六核”观的“基底”^[5]。

(三)“六核”观的模型建构

研究者们尝试构建了数学核心素养“六核”观的

诸多几何模型,如三棱台模型(曹培英,2015)、魔方模型(孙成成、胡典顺,2016)、金字塔模型(吕世虎、吴振英,2017)、九宫格模型(宁锐、李昌勇、罗宗绪,2019)等比较有代表性^[4],但大多数模型停留在“阅读理解”层面,没有形成强有力的逻辑结构.究其原因,数学核心素养“六核”观还缺乏严密的实证研究,“六核”之于数学核心素养的完备性(是否足够)与“六核”之间的纯粹性(是否相互独立或相关)有待考证.

(四)“六核”观的实证研究

南京师范大学喻平教授在理论分析基础上,通过实证研究析出数学核心素养的要素,他采用大样本问卷,对数据进行因素分析和不同的聚类分析,得到数学核心素养的两种结构.第一种结构由8个成分组成:数学抽象、运算能力、推理能力、数学建模、数据处理、空间能力、问题解决能力、数学文化品格.第二种结构由7个成分组成:数学抽象、运算能力、推理能力、建模与数据处理、空间能力、问题解决能力、数学文化品格^[6].这一实证工作既佐证了“六核”观,又对数学核心素养的外延提出了建议:增加“数学文化品格”.这符合数学核心素养内涵表述中的“情感态度价值观”.

北京师范大学张淑梅、何雅涵、保继光等学者的实证研究发现,“六核”之间均具有显著的相关性,其中逻辑推理与数学运算的相关性最大,并且数学运算对逻辑推理的影响比逻辑推理对数学运算的影响更大.数学建模与数据分析这两种素养对其他四种数学素养的依赖程度明显大于其他四种数学素养对它们的依赖程度.说明数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算是基本数学素养.据此可将“六核”分为三类:数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算作为基本数学素养为一类,数学建模与数据分析各成一类^[7].这一研究工作既佐证了“六核”观,又对“六核”的相关性、层次性给出了实证.

另外,关于“六核”的测评研究已取得一定成效.2017年版课标给出的数学核心素养评价标准只是一个描述性的标准,要落实到试题、试卷中,还需要进一步的细化与完善.许多研究者参考PISA的测评框架提出不同于课程标准的评价方案^[8],比如以“六核”为一级指标并分解出若干二级指标,或增加若干与“六核”并列的指标(均为一级指标),对中高考试卷或自编测试卷进行编码、赋值,然后进行内容分析和量化分析,从而开展数学核心素养“六核”的实证研究.

二、数学核心素养的“三会”观

(一)“三会”观的内容概要

2022年4月颁布的《义务教育数学课程标准

(2022年版)》(以下简称“2022年版课标”)指出,数学课程要培养的学生核心素养主要包括以下三个方面:会用数学的眼光观察现实世界,会用数学的思维思考现实世界,会用数学的语言表达现实世界.核心素养具有整体性、一致性和阶段性,在不同阶段具有不同表现.小学阶段侧重对经验的感悟,初中阶段侧重对概念的理解.小学阶段核心素养主要表现为:数感、量感、符号意识、运算能力、几何直观、空间观念、推理意识、数据意识、模型意识、应用意识、创新意识.初中阶段核心素养主要表现为:抽象能力、运算能力、几何直观、空间观念、推理能力、数据观念、模型观念、应用意识、创新意识^[9].

这段话在默认、延续2017年版课标数学核心素养概念及其内涵的基础上^[10],明确提出了数学核心素养的“三会”观(会用数学的眼光观察现实世界,会用数学的思维思考现实世界,会用数学的语言表达现实世界),并补充说明了小学、初中阶段数学核心素养的主要表现(高中阶段数学核心素养的主要表现为2017年版课标所给的“六核”,外加应用意识、创新意识).

至此,历时近8年(自2014年以来)的数学核心素养概念体系基本建立(如表1),我国数学核心素养的研究从“六核”观进展到“三会”观.表1中,“应用意识”与“创新意识”对应“思维品质表现”的观点来自北京师范大学曹一鸣教授^[11],“应用意识”与“创新意识”对应“跨学科表现”的观点来自华东师范大学鲍建生教授^[12].

表1 数学核心素养概念体系

内涵	外延(表现)			
思维品质、关键能力、情感态度价值观	总体表现 “三会” (一级指标)	分学段表现(二级指标)		
		高中 (6+2种)	初中 (7+2种)	小学 (9+2种)
				数感
	数学的眼光	数学抽象	抽象能力	量感
				符号意识
		直观想象	几何直观 空间观念	几何直观 空间观念
	数学的思维	逻辑推理	推理能力	推理意识
		数学运算	运算能力	运算能力
	数学的语言	数学建模	模型观念	模型意识
		数据分析	数据观念	数据意识
	思维品质表现 (跨学科表现)	应用意识	应用意识	应用意识
		创新意识	创新意识	创新意识

(二)“三会”观的由来探寻

“三会”最初是作为数学教育的终极目标被提出来的. 2017 年版课标修订组组长史宁中教授在 2016 年 4 月接受采访时说:“我们在修订高中(数学)课标的时候,有人提出了‘数学核心素养的终极目标是什么’这一问题. 我认为不能这么提,数学的核心素养不能是终极目标,不过我们可以讨论数学教育的终极目标是什么. 我提出了三个会:会用数学的眼光观察现实世界;会用数学的思维思考现实世界;会用数学的语言表达现实世界.”^[13] 理由是一个人学习数学之后,即便未来从事的工作和数学无关,也应当“三会”^[14]. 本质上这“三会”就是数学核心素养,也就是说这“三会”是超越具体数学内容的数学教学目标^[15]. 因此,到了 2022 年版课标,史宁中教授主持的课标修订组就把数学教育所应形成和发展的核心素养统一表述为“三会”^[16].

(三)“三会”观的模型建构

到目前为止,研究者给出的数学核心素养“三会”观的几何模型还不多. 图 1 是中央民族大学孙晓天教授构建的圆环模型^[17],该模型不仅直观显示了“三会”居于数学核心素养体系的核心层,环绕核心层的第二层是小学阶段核心素养的 11 种主要表现(初中阶段的 9 种表现、高中阶段的 8 种表现可类似处理),而且还用箭头动态描绘了以“情境”为载体的“四基”“四能”形成过程(即第三层). 其中,“四基”是指数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验;“四能”是指发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力. 华东师范大学鲍建生教授在多次的公开讲座中也构建了类似的几何模型.

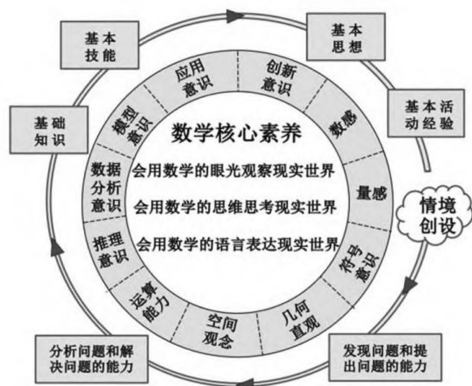


图1 数学核心素养“三会”观的圆环模型

笔者借鉴学者李艺、钟柏昌的研究^[18]给出图2的圆柱模型,该模型由“四基”“四能”“三精”“三会”构成,数学核心素养贯穿始终,其中“四基”“四能”是核心素养的底座与支撑,“三精”(情感、态度、价值观)是核心素养的升华,“三会”是核心素养的统领(终极目标).

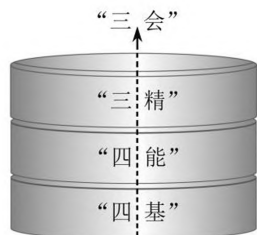


图2 数学核心素养“三会”观的圆柱模型

这些模型都反映“三会”的达成要以数学具体知识、技能、方法、经验的教学(即“四基”)为载体,以数学问题解决的能力形成(即“四能”)为依托,从而将“三会”延伸到数学教学的方方面面、数学课堂的角角落落、数学学习的时时刻刻,避免“三会”观停留在形而上的理论概括层面、脱离数学教学实践.

(四)“三会”观的研究展望

当前,关于“三会”的研究主要停留在思辨层面(比如“三会”何以成为数学核心素养^{[19][20]}? 何为“三会”中的“数学的眼光”^{[21][22]}? 等等),还没有看到相关的实证研究,期待研究者开展以下三方面的研究.

一是就“三会”内部三要素(数学的眼光、数学的思维、数学的语言)的独立性(纯粹性),以及“三会”外部具体表现(小学9+2种、初中7+2种、高中6+2种,具体见表1)的完备性等问题开展实证研究,从而保障“三会”统领数学核心素养的适切性.

二是以“三会”为一级指标,以“三会”在各学段的具体表现为二级指标,构建行之有效的数学核心素养(学业质量)测评方案,真正实现数学核心素养的可测、可教. 受 2022 年版课标修订组另一位组长、北京师范大学曹一鸣教授的研究^[23]启发,笔者尝试给出以下方案:选取课程内容、核心素养、问题情境、作答水平、题目类型等五个维度构建测评框架模型,如图3所示(图中圆点表示各维度二级指标的不同赋值).

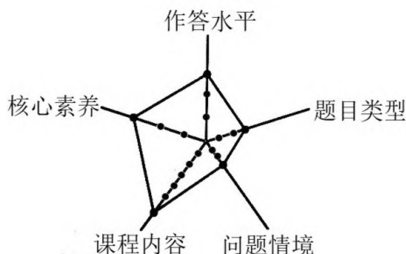


图3 基于核心素养的数学学业质量测评框架模型

其中,“课程内容”维度划分为若干个学习主题(具体见数学课程标准中的课程内容),“问题情境”维度划分为“生活情境”“社会情境”“数学情境”“科

学(跨学科)情境”等,“核心素养”维度划分为若干种具体表现(小学9+2种、初中7+2种、高中6+2种,具体见表1),“题目类型”维度划分为“选择题”“填空题”“解答题”等,“作答水平”维度划分为“不达标”“达标”“超过标准”。最后,五个维度的分值可通过加权平均等计算方法获得总分值。

三是夯实数学核心素养的培养途径,如结构化教学(也称整体教学、主题教学、大单元教学、大概念教学、大观念教学等^[24])、综合与实践活 动、跨学科学习、项目式学习、数学建模等。所有这些培养路径都要因地制宜、因材施教,因为人接受教育的过程不是定量发生的物理变化或化学反应过程,它是人的技能、心智、思维、情感等综合要素的复杂变化过程。数学核心素养的培养过程要充分彰显数学的学科价值与育人价值。

以上三点研究展望,在一些数学核心素养研究文献综述中已有零星的体现^[25]。数学核心素养与“三会”的研究还没有抵达终点,“三会”也可能还不是数学核心素养的“终点”,我们需要持续探索下去。

参考文献:

- [1]刘祖希.我国数学核心素养研究进展:从数学素养到数学核心词再到数学核心素养[J].中小学教材教学,2016(7):35-40.
- [2]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[S].北京:人民教育出版社,2018:4.
- [3]刘祖希.中小学数学教师的学术基础与研究指向:从教研活动的双重属性说起[J].教育研究与评论,2021(5):40-53.
- [4]刘祖希.图说数学核心素养[J].中小学课堂教学研究,2020(10):59-62.
- [5]刘祖希.访史宁中教授:谈数学基本思想、数学核心素养等问题[J].数学通报,2017(5):1-5.
- [6]喻平.数学学科核心素养要素析取的实证研究[J].数学教育学报,2016(6):1-6.
- [7]张淑梅,何雅涵,保继光.高中数学核心素养的统计分析[J].课程·教材·教法,2017(10):50-55.
- [8]蒋澍.中小学数学教育教学研究报告(2016—2020年):基于人大复印报刊资料的转载数据[J].天津师范大学学报(基础教育版),2022(1):22-28.
- [9]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022:5.
- [10]刘祖希.《义务教育数学课程标准(2022年版)》研读补记[J].教育研究与评论,2022(5):50-54.
- [11]曹一鸣,刘冰.数学课标(2022年版):开启数学课程

改革新征程[J].中小学管理,2022(6):20-23.

[12]鲍建生.小学数学中的核心素养及其主要表现[J].小学数学教育,2022(6上):8-10.

[13]廖辉辉,史宁中,朱丹红.数学基本思想、核心素养的内涵及教学[J].福建教育(中学版),2016(7/8):94-96.

[14]史宁中.学科核心素养的培养与教学:以数学学科核心素养的培养为例[J].中小学管理,2017(1):35-37.

[15]史宁中,林玉慈,陶剑,郭民.关于高中数学教育中的数学核心素养:史宁中教授访谈之七[J].课程·教材·教法,2017(4):8-14.

[16]史宁中.《义务教育数学课程标准(2022年版)》的修订与核心素养[J].教师教育学报,2022(3):92-96.

[17]孙晓天,邢佳立.中国义务教育:基于核心素养的数学课程目标体系——孙晓天教授访谈录(三)[J].教学月刊(小学版),2022(3):9-12.

[18]李艺,钟柏昌.谈“核心素养”[J].教育研究,2015(9):17-23.

[19]孙晓天,邢佳立.中国义务教育:基于核心素养的数学课程目标体系——孙晓天教授访谈录[J].教学月刊(小学版),2021(11):11-15.

[20]孙晓天,邢佳立.中国义务教育:基于核心素养的数学课程目标体系——孙晓天教授访谈录(二)[J].教学月刊(小学版),2022(1/2):16-19.

[21]胡晋宾,刘洪璐.数学眼光的内涵及培养[J].中学数学月刊,2021(2):17-20.

[22]胡晋宾,刘洪璐.数学眼光的理论审视与培养建议[J].教育研究与评论,2022(6):57-61.

[23]曹一鸣,王立东,何雅涵.义务教育数学考试评价与教学实施:基于《义务教育数学课程标准(2022年版)》的学业质量解读[J].教师教育学报,2022(3):97-103.

[24]刘祖希.图说数学单元教学[J].中学数学杂志,2022(7):13-17.

[25]杨正朝,熊星月,唐四雨.基于CiteSpace可视化分析下的数学核心素养研究现状及启示[J].中学数学杂志,2022(5):1-5.

【作者简介】刘祖希(1980—),男,湖北仙桃人,华东师范大学出版社副编审,新青年数学教师工作室创始人,全国数学科学方法论研究交流中心副秘书长兼学术委员会副主任,中国教育学会青少年创新思维教育分会常务理事,中国数学会数学教育分会中学工作组成员,主要从事数学教育研究与教师培训(200062)。

【原文出处】《中学数学杂志》(曲阜),2022.11.1~4

【基金项目】中国教育学会教育科研中小学德育专项课题“中小学数学学科德育教学:方法与路径”(课题编号:21DY090618ZB)。