

【教学设计】

# 基于单元视角的贝叶斯公式教学设计

张琦

【摘要】《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》中概率与统计主线部分新增了了解贝叶斯公式的要求。由于其只是选学内容,多数学校并不讲,也鲜有针对高中层次要求的贝叶斯公式的教学设计出现。但是鉴于这部分内容有巨大的应用价值,有必要对其教学进行研究。故通过摸球模型的设计,结合条件概率和全概率公式,巧妙进行贝叶斯公式的教学设计,并对公式进行“合理”一般化。

【关键词】贝叶斯公式;条件概率;全概率公式;单元教学设计

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称《标准》)将高中数学课程内容分为函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动四条主线,这四条主线的内容贯穿必修、选择性必修和选修课程。在选择性必修课程概率与统计主线内容中,新增了全概率公式和贝叶斯公式,《标准》要求学生能够结合古典概型利用全概率公式计算概率,了解贝叶斯公式。

通过必修课程的学习,学生已经有了样本空间和样本点的概念,并通过样本空间和样本点研究了古典概型、事件的关系与运算和概率的基本性质。在选择性必修课程中,需要在上述知识的基础上,进一步研究较复杂随机事件的概率。例如,在事件 $A$ 发生的条件下事件 $B$ 发生的概率,也就是条件概率 $P(B|A)$ 。条件概率是概率论最重要的概念之一,教师在实际教学过程中,往往会认为“条件概率”这一概念比较抽象,学生理解起来比较困难,遇到实际问题一做就错。然而,有了条件概率,只需对公式 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 加以变形就可以得到概率的乘法公式 $P(AB) = P(A)P(B|A)$ 。概率的乘法公式为计算积事件的概率提供了便捷的方式。之后,本着利用概率性质和公式简化概率计算的目标,就得到了全概率公式。全概率公式是概率论中最基本的公式之一,其数学本质是先利用一组两两互斥的事件(和为必然事件)分割事件 $B$ ,再由概率的加法公式和乘法公式求事件 $B$ 的概率。

学习全概率公式以后,我们还可以进一步学习贝叶斯公式。事实上,即使对于高等数学而言,全概率公式和贝叶斯公式也是学习概率论时的两个难点。而且,人教A版《普通高中教科书·数学》选择性必修第三册(以下统称“教材”)对贝叶斯公式的

处理也比较学术。在学习全概率公式后,其给出了如下例题。

例 有3台车床加工同一型号的零件,第1台加工的次品率为6%,第2台和第3台加工的次品率均为5%,加工出来的零件混放在一起。已知第1台、第2台和第3台车床加工的零件数分别占总数的25%,30%,45%。

(1)任取一个零件,计算它是次品的概率;

(2)如果取到的零件是次品,计算它是第 $i(i=1,2,3)$ 台车床加工的概率。

在之后的分析中,教材指出,此题第(2)小题是一个条件概率问题,是在已知抽到的零件是次品的条件下,求这件次品来自于第 $i$ 台车床加工的概率,这个概率我们通常称其为后验概率。这个后验概率的求解需要用到条件概率和全概率公式,并不是很容易。之后,教材直接指出,将例题中的第(2)小题一般化,可以得到贝叶斯公式。其实,这是教学过程中的最大难点,既不清楚为什么学,也不知道怎么学,甚至不知道学了以后有什么用。

关于这部分内容,笔者曾经在区内高中数学教师群内进行过小范围的调查,发现有50%以上的教师在教学过程中不讲全概率公式。有约40%的教师并不清楚全概率公式的意义,有30%的教师对条件概率的理解存在困难。鉴于此,笔者从单元视角进行了本教学设计,且在将其应用于实际教学的过程中得到了积极反馈,故简述如下。

## 一、内容和内容解析

### (一)教学内容和结构框图

本节内容选自教材第七章“随机变量及其分布”的第一节“条件概率与全概率公式”。教师教学用书给出的建议课时为2个课时。但根据实际教学经验,发现2个课时不能有效完成相关内容的教学,故调

整为3个课时.要求学生能够在必修概率课程的基础上,研究通过简单事件求复杂事件的概率,掌握条件概率、概率的乘法公式和全概率公式,了解贝叶斯公式.结合教学内容,设计图1所示教学结构框图.

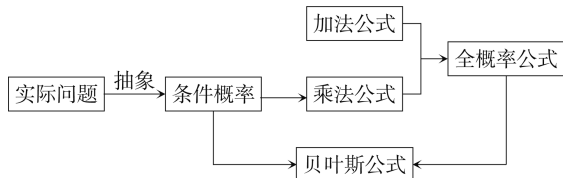


图1

## (二) 内容解析

通过有关必修内容的学习,学生已经能结合有限样本空间,了解两个随机事件独立性的含义;结合古典概型,利用独立性计算概率.在此基础上,怎么求两个不独立事件的概率,就是一个值得研究的问题了,而条件概率的重要性就体现在此处——可以通过变形得到两个不独立事件的概率乘法公式.由于条件概率 $P(B|A)$ 的前提是事件 $A$ 发生,所以 $A$ 就成了新的样本空间,那么条件概率的本质就是在缩小了的样本空间 $A$ 上求事件 $B$ 发生的概率.

有了条件概率的概念,我们可以进一步研究.如果求事件 $B$ 的概率比较困难,但是给其附加一个条件后计算会变得相对容易一些,那么我们就可以用和事件 $B$ 有联系的一组两两互斥的事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ )去分割事件 $B$ ,再由概率的加法公式和乘法公式求事件 $B$ 的概率,公式为

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i), i=1, 2, \dots, n. \text{ 这就是全概率公式,再结合条件概率公式,很容易得到贝叶斯公式,即 } P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}, i=1,$$

$2, \dots, n.$

上述分析过程是知识发生的逻辑顺序,但不是学生学习该处知识的心理顺序.在这里,逻辑顺序需要依据数学学科知识的发展过程和数学概念的内在联系安排教学,且需要按照学生的心理发展水平和年龄特征来组织教学.

## (三) 蕴含的思想方法

本单元的学习内容需要学生从实际问题背景中抽象得出数学概念.这个过程有利于发展学生的数学抽象素养.

通过问题解决得出条件概率公式,并对其加以变形得到概率乘法公式.这个过程有利于提升学生的逻辑推理素养.

整个单元的学习过程,需要学生用数学眼光看待概率,并用概率解释实际生活中的问题.这个过程

中蕴含丰富的数学建模思想.

由于从条件概率到全概率公式再到贝叶斯公式,都是在寻找解决复杂问题的简便解法的理念下进行的思考,这种化难为易的转化思想,对学生尝试用数学的眼光观察现实世界、用数学的语言解释现实世界具有重要价值.

## (四) 教学重点

条件概率的概念,事件的独立性与条件概率的关系,概率的乘法公式,全概率公式.

## 二、目标和目标解析

### (一) 教学目标

(1) 结合古典概型,了解条件概率,能计算简单随机事件的条件概率.

(2) 结合古典概型,了解条件概率和独立性的关系.

(3) 结合古典概型,会用概率的乘法公式计算概率.

(4) 结合古典概型,会用全概率公式计算概率.了解贝叶斯公式.

### (二) 目标解析

达成目标(1)的标志:在解决具体问题的过程中,能够辨析什么样的问题是条件概率问题,并能借助概率计算公式,用条件概率解决实际问题.

达成目标(2)的标志:知道事件的独立性和条件概率的联系,并能根据条件概率通过逻辑推理判断两个事件是否独立.

达成目标(3)的标志:能根据条件概率的定义通过逻辑推理得出概率的乘法公式,能总结得出条件概率的三条基本性质,会利用概率的乘法公式解决实际问题.

达成目标(4)的标志:通过实际问题的解决,会利用概率的加法公式和乘法公式归纳得到全概率公式,并能用全概率公式计算较复杂的实际问题.通过实际问题了解贝叶斯公式,了解利用贝叶斯公式求后验概率的一般步骤,并尝试解决实际问题.

## 三、教学问题诊断分析

学生在必修课程的学习过程中,已经学习了独立性的概念,了解独立性应该通过条件概率来描述.但是在实际运用的过程中,却往往基于生活实际进行判断,从而忽视了独立性和条件概率之间的联系.

由于是通过缩小样本空间求条件概率,学生在心理上接受条件概率会比较困难.另外,全概率公式需要分割要求的事件,这在以往的学习中是没有遇到过的,学生的思维障碍比较大.

贝叶斯公式是选学内容,很可能被放弃.学生以前熟悉的逻辑思维模式是由因导果,其实这也是

全概率公式的逻辑意义。但是从某种意义上讲,贝叶斯公式是全概率公式的相反形式,也就是执果索因。从思维的角度来说,学生理解起来过于抽象。

#### 四、教学过程设计

##### (一) 回顾旧知

**问题1:**袋子中有3个红球(标号为1,2,3),2个蓝球(标号为4,5),随机摸出1个球。能否根据这个实际背景提出你能想到的数学问题?

预设结果:(1)摸到红(蓝)球的概率是多少?

(2)摸到奇(偶)数号码球的概率是多少?

(3)如果摸到的球是红球,那么球的号码是奇数的概率是多少?

【设计意图】这里给出了摸球的背景,但是将问题设计的过程留给学生,以发展学生提出问题的能力。具体操作时,学生基本能够提出问题(1)(2),但是提出问题(3)有一定的困难,需要教师向条件概率的方向加以引导。例如,能否结合问题(1)(2),设计出新的问题?

师生总结:问题(1)(2)是古典概型问题,问题(3)则是条件概率问题。解决条件概率问题的关键在于分析清楚条件是什么。问题(3)中的条件是“摸到了红球”,从而样本空间中的样本点只剩下3个,要求“球的号码是奇数的概率”,满足条件的样本点有2个,所以能够求出概率。如果从公式的角度加以描述,则为  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{3}$ 。

**问题2:**袋子中有3个红球,2个蓝球,每次随机摸出1个球,摸出的球不再放回,共摸两次。能否根据这个实际背景提出你能想到的数学问题?

预设结果:(1)两次都摸到红(蓝)球的概率是多少?

(2)第一次摸到红球、第二次摸到蓝球的概率是多少?

(3)第二次摸到红球的概率是多少?

【设计意图】这里依然是给出摸球的教学情境,问题需要由学生来设计。问题(1)(2)都是条件概率问题,学生容易解决。问题(3)则是全概率问题,这里是按照先后顺序的标准,将事件“第二次摸到红球”分割为“第一次摸到红球,第二次也摸到红球”和“第一次摸到蓝球,第二次摸到红球”的并,之后就能用概率的加法公式和乘法公式求得其概率。

师生总结:设事件  $A_i$  为“第  $i$  次摸到红球”,  $B_i$  为“第  $i$  次摸到蓝球”( $i=1,2$ ),则问题(3)要求的就是事件  $A_2$  的概率。因为  $A_2 = A_1A_2 \cup B_1A_2$ , 所以  $P(A_2) = P(A_1A_2 \cup B_1A_2) = P(A_1A_2) + P(B_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1) \cdot P(A_2|BC_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ 。

##### (二) 类比迁移

**问题3:**有两个相同的袋子,袋子A中有3个红球,2个蓝球;袋子B中有1个红球,4个蓝球。从某个袋子中随机摸出1个球。能否根据这个实际背景提出你能想到的数学问题?

师生活动:(1)摸到红(蓝)球的概率是多少?

(2)如果摸到的球是蓝色的,那么这个袋子是B的概率有多大?

【设计意图】这里仍然利用“摸球”模型,但是又增加了一个袋子,同时去掉了球上的标号,从而促使学生思考还能设计出什么样的问题。问题(1)是一个标准的全概率公式问题,与问题2进行了有序的衔接。问题(2)的解决,则需要依赖贝叶斯公式。上述三个问题连续体的设计,一气呵成,给出背景,让学生进行问题设计,具有一定的新意。

师生总结:设事件A为“从袋子A摸的球”,事件B为“从袋子B摸的球”,事件C为“摸到红球”,事件D为“摸到蓝球”,则问题(2)要求的概率是  $P(B|D)$ ,根据条件概率公式,可知  $P(B|D) = \frac{P(BD)}{P(D)}$ 。根据概率乘法公式和全概率公式,可知  $P(BD) = P(B)P(D|B)$ ,  $P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B)$ 。所以  $P(B|D) = \frac{P(BD)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D|B)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}} = \frac{2}{3}$ 。

上述问题是已知摸到的球的颜色,求是从哪个袋子中摸出的球的概率问题,这就是贝叶斯公式的一个具体应用。

##### (三) 巩固新知

**问题4:**有两个相同的袋子,袋子A中有3个红球,2个蓝球;袋子B中有1个红球,4个蓝球。如果摸到的球是红色的,求这个袋子是A的概率。

【设计意图】问题4还是学生熟悉的问题3的情境,虽然看起来和问题3类似,但是鉴于贝叶斯公式的难度很大,这样过渡更有利于学生理解公式的本质。

师生总结:沿用问题3中事件的记法,则有  $P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$ 。

##### (四) 迁移推广

**问题5:**有两个相同的袋子,袋子A中有3个红球,2个蓝球;袋子B中有1个红球,4个蓝球。从某

个袋子中随机摸出1个球,发现这个球是蓝色的;之后将其放回袋子,再从这个袋子中随机摸出1个球,发现这个球依然是蓝色的.那么这个袋子是 $B$ 的概率有多大?

【设计意图】问题5是在问题3的基础上的拓展.在解决问题5的时候,需要根据题意将其分成“两步”来完成:第一步,从面前的某袋子中随机摸出1个球,发现这个球是蓝色的,此时根据问题3的结论,可知这个袋子是 $B$ 的概率已经不是我们开始认为的 $\frac{1}{2}$ 了,而是变成了 $\frac{2}{3}$ ;第二步,继续从面前的同一个袋子中随机摸出1个球,发现这个球还是蓝色的,解决方法与第一步类似,只是第一步中求得的后验概率 $\frac{2}{3}$ 变成了第二步的先验概率.

师生总结:设事件 $A$ 为“从袋子 $A$ 摸的球”,事件 $B$ 为“从袋子 $B$ 摸的球”,事件 $C_i$ 为“第 $i$ 次摸到红球”,事件 $D_i$ 为“第 $i$ 次摸到蓝球”( $i=1,2$ ).由于 $A, B$ 两个袋子没有区别,所以可以认为袋子是 $B$ 的先验概率是 $\frac{1}{2}$ .根据贝叶斯公式可知 $P(B|D_1) =$

$\frac{P(BD_1)}{P(D_1)} = \frac{P(B)P(D_1|B)}{P(A)P(D_1|A) + P(B)P(D_1|B)} = \frac{2}{3}$ .也就是说,第1次的蓝球是从袋子 $B$ 中摸出的概率为 $\frac{2}{3}$ ,这个概率是在先验概率是 $\frac{1}{2}$ 时求得的后验概率.

因为下面求解的时候这个后验概率又被当作先验概率进行计算,所以我们定义: $P(X|D_1) = P_{D_1}(X)$ ,其中 $X$ 为任一事件.所以 $P(B|D_1) = P_{D_1}(B) = \frac{2}{3}$ ,

$P(A|D_1) = P_{D_1}(A) = \frac{1}{3}$ .接下来,要解决的问题是求

在第1次摸出蓝球的袋子是 $A$ 的先验概率为 $\frac{1}{3}$ ,袋子是 $B$ 的先验概率为 $\frac{2}{3}$ 的条件下,又从这个袋子中

随机摸出1个球,球依然是蓝色的,此时袋子是 $B$ 的概率.也就是要求 $P_{D_1}(B|D_2)$ 的值.根据贝叶斯公

式,可得 $P_{D_1}(B|D_2) = \frac{P_{D_1}(BD_2)}{P_{D_1}(D_2)} = \frac{P_{D_1}(B)P_{D_1}(D_2|B)}{P_{D_1}(D_2)} =$

$$\frac{P_{D_1}(B)P_{D_1}(D_2|B)}{P_{D_1}(A)P_{D_1}(D_2|A) + P_{D_1}(B)P_{D_1}(D_2|B)}.$$

$$\text{故 } P_{D_1}(B|D_2) = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}}{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}} = \frac{4}{5}.$$

为了便于交流,上述公式中加了下标 $D_1$ ,可能显得难以理解.在具体上课的时候,教师可以酌情使

用,也可以引入新的表示事件的符号.解决问题时,关键是要分清此时的先验概率是多少,求得的后验概率又是多少,该如何理解这种变化.

至此,根据贝叶斯公式,我们完成了整个推理过程.可以发现,随着所知道的“结果”越来越多,统计推断的概率也在不断调整,这也是贝叶斯公式的价值之一.

## 五、教学反思

贝叶斯公式和全概率公式都是《标准》中新增加的内容,但是不同之处在于,贝叶斯公式是选学内容.因此,在教师用书中把条件概率、全概率公式作为一个整体给出了一个单元教学设计的范例,但不包括贝叶斯公式.鉴于此,笔者进行了上述教学设计,这个教学设计具有以下两个特点.

一是教学情境具有连续性.这样的教学设计有利于学生快速进入情境,直指问题设计.而且随着对问题的深入挖掘,更能体现概率的应用价值.二是问题设计的开放性.传统的问题设计主要是教师主导,基于学情分析给出现成的教学问题,但是本教学设计采用让学生根据实际背景自己提出数学问题的设计形式,有利于提高学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的综合能力.

## 六、谈贝叶斯公式

从公式的角度来看,贝叶斯公式是条件概率和全概率公式的一个变形,但由于贝叶斯公式有在数据规模较小时仍然有效和对缺失值不敏感等特点,使其在当今社会具有广泛的应用.教材中给出的例题就是一个非常有价值的应用问题.其中,每台机器加工产品的次品率是已经通过统计得出的具体的数值,故称先验概率;要求的概率是在知道零件是次品的结果之后,对各种原因概率的新认识,故称后验概率.但是也需要注意,这里先验并非先验论,只是表示这种知识在试验前根据历史资料或者经验就获得了.

贝叶斯公式便于在获得新的信息之后更新已有模型的参数,因此在日常生活中具有广泛的应用.我们可以通过去商场买衣服模型来进一步进行说明.

假设某商场的服装导购员手里有大量的统计数据,知道有80%的顾客进店只是闲逛,有20%的顾客是真正要买衣服的.此外,导购员还知道真正要购买衣服的顾客中有90%会向他们咨询商品信息,而闲逛的顾客中只有10%会向他们咨询商品信息.那么,当有顾客向导购员咨询商品信息时,其购买商品的概率是多少呢?

这个问题可以通过贝叶斯公式加以求解.如果

(下转第59页)

入分析与讲解.

第二是应遵循教育规律,减轻过重负担.在中学函数教学中,特别容易出现反复刷题、过分强调关于题型、技巧等方面训练的情况.在数学学习中,适度的技巧训练确实是必要的,有助于巩固学生学到的内容,加深学生对于知识的理解,但不应过分强调解题技巧,尤其是不应追求新奇,利用课堂讲解一些偏怪的特殊技巧.在函数教学中,还有一种情况是为应对一些难度较高的题目,补充讲解训练了很多所谓二级结论、引理等非必要的知识,甚至将高等数学的部分内容下放到高中讲授.这种做法不但增加了学生的课业负担,而且还可能出现反效果,比如鼓励学生记住高等数学的一些结论,但却对得出结论的条件和前提置之不理,导致学生在高中就形成了错误的理解,对进入大学后的学习产生很大负面影响.新高考数学特别强调基础性考查,注重方法的普适性,就是为了引导教学走出一些错误的思维定式,认识到钻研“套路”不如打好基础.

第三是应切实回归课标与教材.数学知识的学习绝不是简单的重复记忆,更重要的是在学习过程中的观察、思考、探究、总结等思维过程,因此要特别注意循序渐进,切忌盲目追求教学进度.有的学校在教学中,快速简单地讲解完知识后,一头扎进题海之中.但实际上市面上的习题集、教辅等材料质量良莠不齐,过度进行低质量的刷题训练不仅事倍功半,而

(上接第37页)

我们分别记事件  $A$  为“顾客进店只是闲逛”,事件  $B$  为“顾客进店是真正要买衣服”,事件  $C$  为“顾客向导购咨询商品信息”.可以知道,要求的是在顾客向导购咨询商品信息的条件下购买商品的概率.根据贝叶斯公式,可知  $P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} =$

$$\frac{P(B)P(C|B)}{P(B)P(C|B) + P(A)P(C|A)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{9}{10}}{\frac{1}{5} \times \frac{9}{10} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{10}} = \frac{9}{13}.$$

依据这个概率发现,作为一位理性的导购员,其实并不需要顾客进门就紧随其后提供商品的相关信息,而是有选择性地详略得当的产品介绍,这样不但不会让只是想随便逛逛的顾客感到尴尬甚至反感,而且可以让真正想买衣服的顾客得到细致的服务,同时可以让自己取得更好的业绩.

事实上,贝叶斯公式在搜索引擎、语音识别、垃圾邮件过滤、大数据处理、人工智能等诸多领域有着广泛的应用,其对概率统计的理论发展也有着深远的影响.从更高的视角来看贝叶斯公式,其对数理哲

且很容易磨灭学生学习数学的兴趣和意愿.其实在新教材中每节后面都有练习题,根据内容和难度的差别还分为复习巩固、综合运用、拓广探索等部分,有许多值得推广和思考的空间,教学中应加强对教材的研究,只有研究透了才能讲深讲透.高考对于函数内容的考查进一步强调对基础知识、概念和基本原理的深入了解和综合运用,也就是为了引导学生奠定核心素养的发展的坚实基础,引导中学教学回归课标、回归教材、回归学校教育.

#### 参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[S]. 北京:人民教育出版社,2018.
- [2] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京:人民教育出版社,2019.
- [3] 赵轩,任子朝. 中学数学中概率的相关概念辨析——从一道高考题谈起[J]. 数学通报,2018,57(12):1-4.

【作者简介】赵轩、任子朝、翟嘉祺,教育部教育考试院(100084).

【原文出处】《数学通报》(京),2022.9.7~10

【基金项目】教育部教育考试院“十四五”规划支撑专项课题“高考命题质量保障体系研究”(NEEA2021020).

学的发展也有着巨大影响.

#### 参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 金天寿. 试谈条件概率的教学[J]. 数学通报,2012,51(6):24-27.
- [3] 左国超. 讲授全概率公式和 Bayes 公式的一点体会[J]. 大理师专学报,1996(1):10-11.
- [4] 小岛宽之. 统计学关我什么事:生活中的极简统计学[M]. 罗梦迪,译. 北京:北京时代华文书局,2018.
- [5] 刘倩. 由古典概型引入贝叶斯公式的一种教学设计[J]. 高师理科学刊,2016,36(6):56-60.

【作者简介】张琦(1981-),男,北京教育学院丰台分院,中学高级教师,主要从事数学教育和数学建模研究.

【原文出处】《中国数学教育》:高中版(沈阳),2022.11.32~36,58

【基金项目】北京市教育学会“十四五”教育科研课题——技术视角下发展教师数学建模素养的实践研究(FTYB2021-015).