

【高考解析】

近三年高考数学开放性试题分析

马慧慧

【摘要】近年来,高考数学命题越来越重视开放性试题的加入——因其具有发散性、探索性、多样性等特点,更有利于考查学生的数学理解能力、探究能力、逻辑思维和批判思维.文章对近三年高考数学试题中的开放性试题进行统计分析,发现试题涉及条件开放、结论开放、条件和结论同时开放等类型,了解其教育价值,尝试提出开放性试题的编制策略,并将其渗透到日常数学教学中.

【关键词】高考数学;开放性试题;教学启示

20世纪80年代“数学开放题”传入我国,戴再平等学者开始对其进行研究,提出“开放题是指那些答案不唯一,并在设问方式上要求学生进行多方面、多角度、多层次探索的问题”^[1].2020年发行的《中国高考评价体系》主要由“一核、四层、四翼”组成,它是新时代高考内容改革和命题工作的理论支撑和实践指南^[2].开放性试题的条件可变性、方法多样性、结论开放性等特点,使其解决过程更有利于检验出学生发现和提出问题、分析和解决问题的能力,在高考数学试卷中引入、设置开放性试题符合考试内容改革的要求^[3].本文试图对近三年高考数学试题中的开放性试题进行统计分析,以期帮助中学数学老师对开放性试题有更全面的认识,同时也为中学数学老师如何编制开放性试题,并将其渗透到日常数学教学中提供参考.

一、近三年高考数学试题中的开放性试题统计分析

2020年的高考有13套数学试卷,2021年和2022年的高考均有10套数学试卷(含全国甲、乙文理卷,新高考I、II卷,北京卷,天津卷,上海卷,浙江卷).三年共有33套试卷,其中的开放性试题共计18道(有1道在新高考I、II卷中均出现,有2道在文理卷中均出现),主要分布在全国卷、新高考卷、北京卷.本文将开放性试题划分为条件开放、结论开放、条件与结论均开放三大类型^[4](开放性试题解题策略在数学中非常常见,这里不再统计),依此对2020—2022年高考数学开放性试题的题型、考查知识点、分值、题量等进行统计整理,见下页表1、图1、图2、图3、图4.

从图、表中可以看出近三年高考数学开放性试题主要特点有:

(1)从试卷角度来看,高考数学开放性试题一般出现在全国卷、新高考卷、北京卷中,且在北京卷中连续三年都出现了.

(2)从题型角度来看,高考数学开放性试题一般是以填空题、解答题的形式出现,且填空题所占比重越来越大.

(3)从开放类型来看,条件开放型一般出现在解答题中(这里的条件开放是半开放状态,让考生在备选条件中选择后继续回答问题,且最终答案唯一);结论开放型一般出现在填空题中(答案不唯一,写出一个即可);条件、结论均开放型可能出现在填空题中,也可能出现在解答题中(选择不同的备选条件,导致产生不同的答案).

(4)从考点分布来看,2020年高考数学开放性试题集中考查了三角函数与解三角形.在随后的两年里,陆陆续续的开始考查函数、导数、数列、圆锥曲线、立体几何等知识点,可以看出高考数学开放性试题的考查内容逐渐丰富起来.

二、2022年高考数学中的开放性试题赏析

2022年的全国卷、新高考卷、北京卷中都出现了数学开放性试题.以开放性试题的开放类型为切入点,结合考查的知识点,对2022年的高考数学开放性试题进一步赏析,并从学生的角度思考,探讨开放性试题的价值.

(一)条件开放型的高考数学试题

例1 (2022年北京卷第17题)如62页图5,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 BCC_1B_1 为正方形,平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $AB=BC=2$, M,N 分别为 A_1B_1,AC 的中点.

(I)求证: $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(II)再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知,求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值.

条件①: $AB \perp MN$;条件②: $BM=MN$.

赏析 本题为解答题,分值14分,以常规的三棱柱为背景,但在设问上稍做改变,在第(II)问中,给出了两个备选条件供考生选择,进而完成解答,但

表 1 近三年高考数学中的开放性试题

年份	试卷	开放题类型	题型	考查知识点	分值	题量
2020	新高考 I、II 卷	条件、结论均开放	(第 17 题)解答题	解三角形	10 分	4
	北京卷	结论开放	(第 14 题)填空题	三角函数	5 分	
		条件、结论均开放	(第 17 题)解答题	解三角形	13 分	
2021	全国甲卷(理)	条件、结论均开放	(第 18 题)解答题	数列	12 分	7
	全国乙卷(文、理)	结论开放	(第 16 题)填空题	空间几何体的三视图	5 分	
	新高考 II 卷	结论开放	(第 14 题)填空题	函数	5 分	
		条件开放	(第 22 题)解答题	导数	12 分	
	北京卷	结论开放	(第 14 题)填空题	三角函数	5 分	
		条件、结论均开放	(第 16 题)解答题	解三角形	13 分	
2022	全国甲卷(文)	结论开放	(第 15 题)填空题	圆锥曲线	5 分	7
	全国乙卷(文、理)	条件、结论均开放	(文第 15 题,理第 14 题)填空题	圆的方程	5 分	
	新高考 I 卷	结论开放	(第 14 题)填空题	直线和圆的位置关系	5 分	
	新高考 II 卷	条件、结论均开放	(第 21 题)解答题	圆锥曲线	12 分	
	北京卷	结论开放	(第 14 题)填空题	分段函数	5 分	
		条件开放	(第 17 题)解答题	立体几何	14 分	

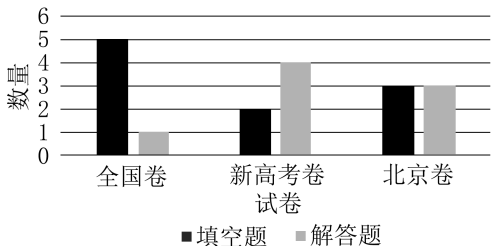


图 1 2020—2022 年高考数学开放性试题的试卷分布图

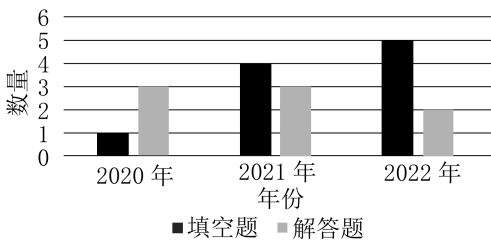


图 2 2020—2022 年高考数学开放性试题的题型图

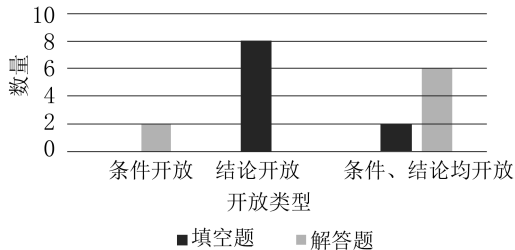


图 3 2020—2022 年高考数学开放性试题的开放类型图

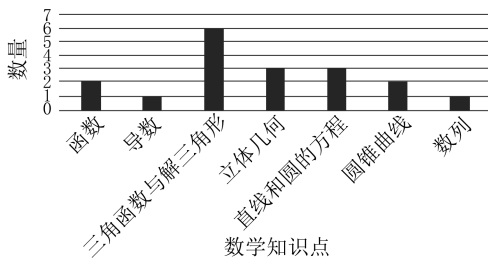


图 4 2020—2022 年高考数学开放性试题考点分布图

殊途同归,最终求出的正弦值相同,所以这是一道条件开放性试题.

第(Ⅰ)问考查直线与平面平行的判定(可利用线线平行 $\Rightarrow$ 线面平行),第(Ⅱ)问考查线面角,由于条件开放,考生需要在给出的两个条件中选出一个作为已知,以确定侧面的形状,这里也考查了学生思维的严谨性.在解答第(Ⅱ)问时,可以首先证明在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 BC,BA,BB_1 两两垂直,故分别

以 BC,BA,BB_1 为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,用向量表示线段;再求出平面 BMN 的一个法向量 $\vec{n}$;最后通过计算线面角的向量公式 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{AB} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AB}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{AB}|}$ 来求出解.解答过程中发现,选择条件①证明 BC,BA,BB_1 两两垂直比较容易,选择条件②证明起来比较复杂.

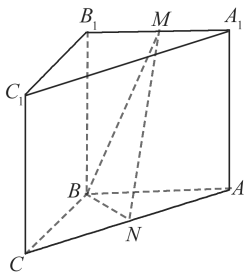


图 5

教育价值探视 条件开放型的试题——仅条件开放,不论学生选择哪个备选条件继续作答,都会发现殊途同归,最终的结论明确唯一,所以这种条件自选、结论唯一的开放性试题也可以称为“殊途同归题”。该类型试题的备选条件之间具有等价关系,有利于培养学生的数学选择能力,培养学生分析和解决问题的能力,提高学生的批判性思维,面向所有学生,自行筛选出适合自己的那个条件继续解答。

(二) 结论开放型的高考数学试题

例 2 (2022 年全国甲卷文第 15 题) 记双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 e , 写出满足条件“直线 $y = 2x$ 与 C 无公共点”的 e 的一个值_____.

例 3 (2022 年新高考 I 卷第 14 题) 写出与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 都相切的一条直线的方程 .

例 4 (2022 年北京卷第 14 题) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值, 则 a 的一个取值为 _____; a 的最大值为 _____.

赏析 这3题都是“举例”填空题,分值5分,例2是以双曲线的离心率为载体设置的试题,例3主要考查直线与圆的位置关系,例4是通过含参的动区间分段函数来设计的.可以看出考查的知识点精细,条件明确,结论多样,都是结论开放性试题.

教育价值探视 结论开放型的试题——条件明确,结论不唯一,增强了试题的灵活性.学生可以根据自己的思维写出一个符合题意的答案,有利于不同水平的学生都能发挥出自己的数学能力,不同的答案对应着不同的思维方案,可以很好地考查学生思维的灵活性.

(三) 条件、结论均开放型的高考数学试题

例5 (2022年全国乙卷文第15题理第14题)
过四点 $(0,0)$, $(4,0)$, $(-1,1)$, $(4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为_____.

赏析 本题是以圆的方程为载体的条件自选结论多样的填空题, 分值 5 分, 要求学生在已给出的四点 (不在同一条直线上的点) 中选择其中三点去确定一个具体的圆, 共有四种不同的选择, 不同的选择

导致得到不同的答案,学生写出一个符合题意的答案即可.

例6 (2022年新高考Ⅱ卷第21题) 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(2, 0)$, 渐近

线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$.

(1)求 C 的方程;

(2) 经过 F 的直线与 C 的渐近线分别交于 A, B 两点, 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 在 C 上, 且 $x_1 > x_2 > 0, y_1 > 0$. 过 P 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与过 Q 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交于点 M , 从下面三个条件①②③中选择两个条件, 证明另一个条件成立:

① M 在 AB 上; ② $PQ \parallel AB$; ③ $|AM| = |BM|$.

赏析 本题为解答题,分值 12 分,以双曲线为背景,第(1)问比较常规且简单,求双曲线 C 的方程;第(2)问是条件不足、缺少结论的开放性试题,要求考生在三个备选中选择两个作为条件,另一个作为结论,并证明其成立.共有三种不同的组合,不同的选择有不同的解题思路,解答的难度也不尽相同.

教育价值探视 条件、结论均开放型的试题——条件自选,结论多样,它既有着条件开放型的优势、又有结论开放型的优势,从条件的角度来看,根据试卷提供的备选,选择出来的条件具有相互独立性,导致结论不同,这不仅培养学生的批判性思维,还有利于培养学生进行优选的能力;从结论的角度来看,结论多样,学生可根据自己的数学水平及思维特点进行选择,体现了试题的人文关怀,考查了学生构建数学问题的能力、思维的灵活性。

三、数学开放性试题编制策略

数学开放性试题一般是由数学封闭题改编形成的,常规的封闭题条件恰当、答案固定,根据不同开放类型的数学开放性试题具有不同的特点,可以有以下三种不同的开放性试题编制策略:

(一) 条件开放型——“条件等价”策略

条件开放型试题条件开放、答案固定,如 2022 年北京卷第 17 题.

从“条件”入手,在编制条件开放型试题时,先抽出题目中的一个条件,然后寻找与之等价的条件,最后将这几个等价条件都呈现在题目中供学生选择,不论学生选择条件①,还是选择条件②(或者选择条件③)都能解出此题,且从不同条件出发最终得到的答案唯一,当然选择不同的条件会出现不同的解题切入点.

例 7 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差 $d > 0$, 前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{3}, (a_n - 1)b_{n+1} = nb_n$, 从下面的条件①、条件②、条件③中选择 一个作为已知条件, 求: (1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 数列 $\{b_n - 1\}$ 的前 n 项和 T_n .

条件① $a_2 - b_1 = 2d$; 条件② $2(a_1 + a_6) = a_{15}$; 条件③ $S_9 = 36a_1$.

(二) 结论开放型——“数学本质”策略

结论开放型试题条件固定, 答案多样, 如 2022 年新高考 I 卷第 14 题.

从“知识点”入手, 在编制结论开放型试题时, 可以考虑以该知识点为载体得出的答案是否唯一, 例如, 考查“函数”相关知识点——函数的基本性质、含参函数的参数取值范围, 往往符合条件的答案多样.

例 8 若函数 $f(x) = \sin(wx + \frac{\pi}{6})$ ($0 < w < \frac{1}{2}$) 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内有最值, 则 w 的一个取值为 _____.

(三) 条件、结论均开放型——“知识系统化”策略

条件、结论均开放型试题条件不明确, 答案不唯一, 如 2022 年新高考 II 卷第 21 题.

从“知识系统化”入手, 在编制条件、结论均开放型的试题时, 搜寻同一知识背景下的多个题目, 它们之间的条件有部分相同、部分不同, 结论也不同——不同的选择导致解题策略不同、解题难度不同. 尝试将多个题目合并成一题, 考查与该知识有关的题型、解题策略. 例如“解三角形”相关知识点有正弦、余弦定理及其推论, 三角形面积公式、常用角; 题型有用正弦、余弦定理判断三角形的形状, 求角、求边、求三角形面积等.

例 9 在 $\triangle ABC$ 中, $a + b = 2c$, $3\sin A = 2\sin B$, 再从下面条件①、条件②中选择一个作为已知条件, 求: (1) a 的值; (2) $\triangle ABC$ 的面积.

条件① $ab = 24$; 条件② $c\sin C = \frac{5\sqrt{7}}{4}$.

四、教学启示

如何恰当地在日常数学教学中引入开放性试题呢? 下面笔者从新授课、习题课两种不同的课型进行探讨.

(一) 在新授课中引入开放性试题

数学新授课教学环节一般分为“导入—讲解新课—巩固练习—课堂小结—布置作业”.

导入环节, 适当情况下可以采用“开放性问题导入”, 例如在人教 A 版数学必修第一册“1.1 集合的概念”新授课中, 采用结论开放性问题导入: “在小学和初中, 我们已经接触过了一些集合, 你能举出一些例子吗?”.

巩固练习环节, 例如在人教 A 版数学必修第二册“8.2 立体图形的直观图”新授课中, 通过改编封闭题, 使之变身为“结论开放性问题”: “在立体图形 6-11 中, 有相同三视图的两个立体图形是 _____.” (写出一组即可) (原题只有一组, 改编后有两组: 图 6 与图 8、图 7 与图 9).

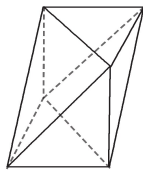


图 6

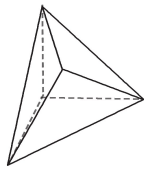


图 7

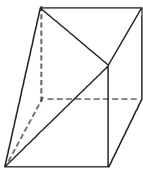


图 8

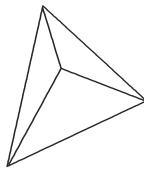


图 9

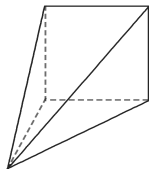


图 10

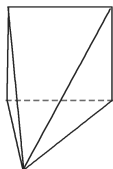


图 11

(二) 在习题课中引入开放性试题

以问题为导向的习题课教学模式一般为“创设情景→尝试引导→自主解决→反馈梳理”.

创设一个成功的问题情景, 更容易激发学生的探究兴趣. 以相关知识为背景, 设计开放性试题, 通过问题驱动学生多角度思考、讨论, 让学生在解决问题的过程中, 掌握知识技能, 积累解题经验. 例如在人教 A 版数学选择性必修第一册“2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系”习题课上, 设计一道条件、结论均开放型的问题: 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$, 从下面条件中选择一条直线、一个圆, 判断直线与圆 C_1 、圆与圆 C_1 的位置关系, 如果相切, 求出切点; 如果相交, 求所截得的弦长. (不同的选择, 结论不同) 条件① $y = 2x - 2$; 条件② $y + x + 10 = 0$; 条件③ $y = 4$; 条件④ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$; 条件⑤ $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$; 条件⑥ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

纵观高考数学试题, 我们可以看到近三年全国卷、新高考卷、北京卷中都有开放性试题的身影, 在新的高考命题理念下, 教师要及时更新教学观念, 改变教学方式, 学会编制数学开放性试题, 让学生在数学教学中得到练习, 获得解题经验, 以便适应高考改革.

参考文献:

- [1] 戴再平. 开放题——数学教学的新模式[M]. 上海: 上海教育出版社, 2002.
- [2] 任子朝, 赵轩, 翟嘉祺, 徐奉先. 高考开放题命题的理论和技术研究[J]. 数学通报, 2021, 60(7): 37-41.
- [3] 任子朝, 赵轩. 数学考试中的结构不良问题研究[J]. 数学通报, 2020, 59(2): 1-3.
- [4] 黄维静, 陈建华. 高考数学开放性试题解析——以 2021 年高考试题为例[J]. 高中数学教与学, 2021(12): 1-4.

【作者简介】马慧慧(1997 -), 女, 安徽亳州人, 安徽省淮南第三中学, 硕士, 主要研究中学数学教学(232007).

【原文出处】《中学数学杂志》(曲阜), 2022. 11.

39 ~ 42