

## 【专题·逻辑推理】

编者按:逻辑推理是六大数学核心素养之一,但是,部分教师对逻辑推理素养的认识存在偏差,或者缺乏统筹规划,导致学生逻辑推理素养水平不高,不同形式的逻辑推理能力发展不均衡。本期专题文章对逻辑推理素养进行深入分析解读,进而提出了培养途径和策略,希望能对教师朋友们有所助益。

# 高中数学逻辑推理素养的生成价值与培育路径

郭妍 沈建民

**【摘要】**逻辑推理作为数学学科的六大核心素养之一,对学生的数学学习及未来发展具有特殊的价值。通过构建高中数学逻辑推理素养的五层次培育图,探究培育学生逻辑推理素养的路径——重视数学双基、强化数学运算、关注推理应用、渗透数学文化、引导自我反思,以期能够为高中数学教师在教学中培育学生的逻辑推理素养提供启示。

**【关键词】**逻辑推理;高中数学;知识体系;合情推理;数学文化

2018年,教育部颁布《普通高中数学课程标准(2017年版)》,确立了数学学科的六大核心素养,逻辑推理作为其中之一,因其对学生的数学学习及未来发展具有重要的价值,已成为学界研究的热点。相较于顶层理念的探索,高中一线教师更加关注逻辑推理素养的落地。但要推进逻辑推理素养从理论探寻走向实践应用,必须回答两个基本问题:学生生成数学逻辑推理素养的价值有哪些?教师培育学生数学逻辑推理素养的路径是什么?基于此,本文拟对上述问题展开一些探究。

## 一、学生生成逻辑推理素养的价值探寻

逻辑推理是指从一些事实和命题出发,依据规则推出其他命题的素养<sup>[1]</sup>,注重学生自身素养的形成与发展,具有可育性与生长性等特性。从学生的发展角度来看,逻辑推理素养不仅是搭建知识体系的关键黏合剂、激发创新创造的必备能量柱,还是问题解决、思维锻炼、理性精神培植的重要助推器。对高中学生来说,在学习数学的过程中生成逻辑推理素养具有特殊的价值。

### (一)有效搭建知识体系,激发学生创新创造

数学知识体系是数学课程中以公理、定理等数学知识组成的有机统一体,有效数学知识体系的搭建对于学生数学学习的重要意义不言而喻。在高中数学知识体系中,不同的数学知识发挥着不同的作

用,一部分可以看作是点,一部分可以看作是线,若以此搭建知识体系,需找到点与点、线与线、点与线彼此之间的关联,这种关联便是依靠逻辑形成的<sup>[2]</sup>。创造作为人类思维的最高表现<sup>[3]</sup>,是在对客观事物的深刻理解、超脱习惯界限的方法选择及多角度的层次探求之上互相渗透、合理构建的结果,具备难以脱离逻辑思考的特点。在高中数学的学习中,学生只有拥有一定的知识储备、具备一定的理解力、依托一定的逻辑思考时,才能迸发新颖的火花,提出具有创造性的想法。因此,学生逻辑推理素养的生成可以有效搭建知识体系,能够激发学生创新创造的能力。

### (二)精准把握问题关联,提升问题解决效能

高中阶段的数学较于义务教育阶段来说,对学生水平的要求有了一定程度的提高。面对更为复杂的数学问题,若要高效地完成问题解决,首先要迅速且确切地弄清问题,即学生需敏捷地弄清楚问题的每个条件及其彼此间的联系。针对问题间关联的把握,主要在于对问题发展脉络进行有条理地、有逻辑地分析。换言之,通过逻辑推理形式,学生可对问题的“来龙去脉”展开梳理,从而能够快速准确地把握条件与条件之间、新问题与旧问题之间的关键联系,发现突破口,找到切入点。其次需要问题解决者能够深入切入点,有条理、有根据地拟定与实施计划,兼

具系统解决问题的能力,最终得出问题结果.苏联数学家奥加涅相将数学问题作为一种题系统进行研究,认为数学问题是由(S,R)系统构成,并指向问题的逻辑结构,侧重解题的逻辑方法<sup>[4]</sup>,强调系统解决问题的能力.逻辑推理作为问题解决的“纽带”,反映出系统性处理问题的能力,已然成为沟通问题起点与结论的重要助推.故而,当学生在高中数学学习中生成一定的逻辑推理素养时,其可依据对数学问题脉络的梳理及系统性处理问题的能力,迅速且精准地把握问题间的关联,以获得正确结论、解决数学问题,从而提升问题解决的效能.

### (三) 注重锻炼思维品质,促进理性精神形成

逻辑推理是人们在数学探索中展开沟通的基本思维品质,是个体在数学活动中开展思考与判断的关键推力,为学生锻炼思维提供了有效的途径<sup>[5]</sup>.《道德经》有云:“不出户,知天下;不窥牖,见天道.”正可谓内有逻辑,以据而推,思之则得,思维的魅力自古以来就璀璨闪耀.史宁中先生指出通过核心素养的培育,学生应达到“三会”境界,其中学会用数学思维分析世界,就侧重强调对于学生逻辑推理的培育<sup>[6]</sup>.事实上,生活中许多方面都涉及数学,这部分的数学内容大多不是具体的公理、定理和结论,而是数学中的理性思想和精神所起的作用.高中阶段,学生生成逻辑推理素养后,不仅会利用数学思维进行分析,还能奉以理性精神大胆追求真理,从而不但能够深入数学学习而且能够跳跃而出,联系生活,达到他山之石,可以攻玉的贯通境界.鉴于此,学生逻辑推理素养的生成有利于锻炼其思维品质,促进其理性精神形成.

## 二、培育学生逻辑推理素养的路径构建

数学学科的核心素养形成是基于学生的数学学习,其独特的内隐性,决定了这是一个积时累日的、循序渐进的过程<sup>[7]</sup>.若要培育逻辑推理素养,离不开关键的数学知识、技能作基础,离不开进一步发展的问题解决能力作驱动.同时,指向数学学科本身特性的用以认识客观世界现象的数学思维<sup>[8]</sup>,成为数学学习中必备品格的形成要素.这与南京师范大学学者提出的学科核心素养的三层架构图恰好对应,即“双基层、问题解决层、学科思维层”<sup>[9]</sup>.在此基础上,西北师范大学的吕世虎、吴振英基于数学的认识论价值、应用价值、思维价值和育人价值,提出了数学学科核心素养的四层次体系塔:数学双基层、问题解决层、数学思维层、数学精神层<sup>[10]</sup>.

根据建构主义的学习观,学习是学习者在自身经验基础上,通过情景、交流、协作促进内化,从而完

成意义建构的过程<sup>[11]</sup>.李松林教授指出学科素养作为一个有机体,其最终指向的是学生个体的自我整合<sup>[12]</sup>.因而,逻辑推理素养培育的最终指向是学生经过自我的监控与整合将逻辑推理素养建构成为自身的一部分,从而完成内化,将其转化为终身学习路途中的高效助推器.“反思”属于元认知监控,是完成个体整合与内化的关键活动,是逻辑推理核心素养最高水平层次——交流与反思中的核心内容.但反思并非是一般性的回顾,而是深层次的挖掘,具备研究的性质,其目的不单是指向过去,更关键的是着眼未来活动<sup>[13]</sup>,成为发展自我监控与整合的高效途径.基于此,结合逻辑推理素养的价值意涵,从数学双基、问题解决、数学思维、数学精神、自我监控与整合五个层次构建致力于培育高中生数学逻辑推理素养的生成路径(如图1).

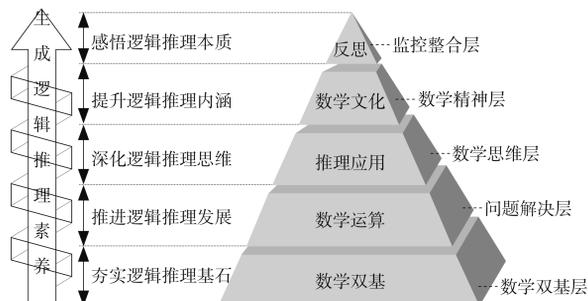


图1 高中数学逻辑推理素养的五层次培育

### (一) 重视数学双基,夯实逻辑推理基石

数学中的知识是环环相扣的,只有牢固掌握数学基础知识,才能拥有正确思维基础,形成逻辑推理.基本技能作为个体完成某种数学任务时一系列协调的、自动化的活动方式<sup>[14]</sup>,为新知识的获得提供基础,是数学能力生成和发展的前提条件.故而,基础知识与基本技能是解决一切问题的根基,也是发展学生数学能力、生成逻辑推理素养的基石.日常教学中教师要注重引导学生梳理并明晰概念的产生与发展过程,关注学生对定理及证明过程的理解、接受水平<sup>[15]</sup>,以此利用数学知识与数学技能搭建证据链从而进一步深化知识、凝练结论<sup>[16]</sup>.例如在高中“平面的基本性质”学习中,若学生不能掌握基本事实1“不共线的三点确定一个平面”与基本事实2“若一条直线上的两个点在一个平面内,那么这条直线在这个平面内”,不了解“两点确定一条直线”基本知识,不会利用基本画图技能画出图形,则无法推出“经过一条直线和这条直线外一点,有且只有一个平面”这一结论.因而,只有在学习知识与应用知识的过程中,在学生熟练掌握知识与技能的基础上,才可以促使学生完成推理.

## (二) 强化数学运算, 推进逻辑推理发展

数学运算是指在明确运算对象的前提下, 能够依据法则准确地进行运算, 并较好地理解算理, 攻克数学问题的基本手段<sup>[17]</sup>. 运算中的每一步都是以运算法则为先决条件, 这类类似于证明中的公理, 可以说进行数学运算的同时就是一种演绎推理的过程, 而定理的推演又需要一定运算基础. 故此, 对数学运算的强化有助于学生解决逻辑推理过程中遇到的推演难题, 进而推进逻辑推理素养培育的进程. 例如在“函数的基本性质”问题探究中, 采用“规一例”法, 引导学生利用  $f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = k(x_1 - x_2)$  严密的推理运算得出函数  $f(x) = kx + b$  的单调性, 从而走出初中阶段的图象观察, 回到函数解析式, 回到函数本身, 跳出“由图象推导出性质”的惯性思维. 以严密的运算推演问题, 在推理运算的过程中, 一步步接近其固有属性, 完成逻辑链接, 在强化运算的过程中推进逻辑推理的发展.

## (三) 关注推理应用, 深化逻辑推理思维

逻辑推理的提升离不开逻辑思维的发展, 随着学习的持续深入, 在基础知识、以运算为手段解决数学问题之上, 在不断推理的应用之中, 学生的逻辑思维不断深化. 高中数学的学习要讲究逻辑, 在引导性的应用、自主性的推理探究活动中, 学生可以积极地展开真理的探索、有条理地搭建逻辑思路、递进性地完成推理, 从而能够促进思维的提升、推进逻辑推理的生成. 依照推理过程的思维方向划分, 逻辑推理主要包含合情推理(归纳推理、类比推理)和演绎推理两种推理形式, 再考虑逻辑推理意识的触动引发, 需要教师关注以下三方面.

一是巧构情境问题, 触发逻辑推理意识. 高中数学课程始于系列化的“情境+问题”<sup>[18]</sup>, 作为教学的起点, 教师应通过多样性的情境创设巧妙地引出问题, 引导学生进行探究, 并在问题探究中自觉形成推理意识. 例如“立体几何初步”中, 对基本图形位置关系的学习是以长方体为载体, 聚焦于平面内的垂直与平行两个基本位置关系, 对直线、平面间的关系展开探究, 故而在学习平面与平面间的垂直关系时, 不需直接举出实例, 而应类比直线、平面间平行关系的学习, 在探究了直线与直线、直线与平面垂直之后, 自然联想平面与平面间除具有平行关系是否也具有类似的关系呢? 如果有该如何判断呢? 在学生的逻辑链条中设置情景、提出问题能够触发学生自觉形成推理意识.

二是鼓励合情推理, 发现逻辑推理结论. 猜想是促进学生逻辑推理素养生成的重要途径之一. 在创设出问题情境、明确学习任务后, 教师应鼓励学生积极

地展开合情推理, 大胆地进行猜想, 通过类比、归纳的方法体验“再创造”的过程, 进而促进逻辑推理并发现结论. 例如在学生具备推理意识后, 引导学生类比角刻画相交直线的位置关系, 引进二面角. 以日常开门为观察点, 刻画不同二面角; 以教室墙面与地面为观察点, 归纳直二面角; 以新教材中建筑工人砌墙所用铅锤为探究点, 猜想得到两平面垂直性质定理. 在此过程中充分给予学生猜想探究的空间, 通过引导将问题设立在学生的最近发展区内, 通过协作碰撞出思维的火花, 促进猜想探究, 从而发现逻辑推理的结论.

三是强调演绎推理, 论证逻辑推理结果. 演绎推理作为逻辑推理的关键形式之一, 是从一般到特殊的推理方法, 合情推理能产生猜想, 演绎推理能证明猜想. 故而在数学学习中, 教师要善于引导学生从合情推理上升到演绎推理, 强调演绎推理严谨的论证过程. 例如“平面与平面垂直的性质定理”的教学, 教材从一个平面内的直线与另一个平面的特殊关系到直线不在两平面内的探究, 即将探究转化为如果已知平面  $\alpha \perp$  平面  $\beta$ , 直线  $a \perp \beta$ ,  $a \not\subset \alpha$ , 判断  $a$  与  $\alpha$  的位置关系. 利用严格的证明程序进行推演, 在平面  $\alpha$  内作垂直于平面  $\alpha$  与平面  $\beta$  交线的直线  $b$ , 因为  $\alpha \perp \beta$ , 所以  $b \perp \beta$ , 又  $a \perp \beta$ , 所以  $a \parallel b$ , 又  $a \not\subset \alpha$ , 所以  $a \parallel \alpha$ , 即直线  $a$  与平面  $\alpha$  平行, 得出不在两平面内的直线与平面间的关系. 推理证明过程环环相扣, 培养学生对已有结论的合乎逻辑的理性思考, 展现学生思维推理过程, 帮助学生厘清论证思路、规范数学语言, 提升学生逻辑推理.

## (四) 渗透数学文化, 提升逻辑推理内涵

逻辑推理素养在逻辑推理能力的基础上, 强调个人具有的思维品质与其在推论过程中情感、态度与价值观的体现<sup>[19]</sup>. 逻辑推理素养不仅包括逻辑推理知识、逻辑推理能力及逻辑推理思维, 更是指向高层次的逻辑推理精神. 数学文化是数学学科品格因素的重要组成部分, 突出数学育人的作用, 聚焦数学对个体精神方面的濡养. 中华民族独特的数学文化还能赋予逻辑推理素养民族意义, 内化为人们的精神追求、丰厚人文历史情怀、树立正确的价值观. 在高中数学教学中渗透数学文化, 学生不单能够汲取数学的思想与精神, 体会数学逻辑思考与推理探究的独特趣味, 而且能够做到理想坚定、求真学问、民族认同. 因此, 数学文化的渗透能够赋予逻辑推理素养时代意义、民族精神, 提升逻辑推理素养的内涵. 例如在等差数列的前  $n$  项和公式的探究中, 当同学们完成等差数列求和通项公式推理后, 可介绍其对应的历史推导背景: 公元前 1800 年古埃及的“加罕

纸草书”以份分数问题总结出了等差数列的求和通项公式;我国南北朝时期的《张邱建算经》中曾以初、末日织尺数一半乘织讫日数得织布总数,得出首相末项的等差求和公式;魏晋时期数学家刘徽标注《九章算术》时,在推导良马15日内每日所行里数逐项相加的过程中发现了等差数列的求和通项公式;北宋数学家沈括善于观察与思考,将垒砌的酒坛看作离散量,推理提出了“隙积术”,其不单是二阶等差数列的求和公式,更是开创了我国“垛积术”的研究。通过多种方法的推演,完成了一次今人和古人跨越千年的对话,感受推理探究的趣味,坚定挖掘真理的意志,体会民族的奋斗精神,进而丰富学生的精神世界,提升逻辑推理的内涵。

#### (五) 引导自我反思,感悟逻辑推理本质

数学逻辑推理的本质是指命题间的连接与贯通,即推理过程的传递性<sup>[20]</sup>。反思并非简单的归结或复述,而是具有指向性目标、加持持续性心理努力的高层次复杂性的自我监控与整合活动。在学生发现规律,理解知识的内涵,会意逻辑推理之后,一个重要的环节就是引导学生进行反思。建构主义学习观认为学习的最终目的是学生自主地完成意义建构,将所学内化于心,才能外化于形。学生凭借之前的积累,通过最终的反思,监测逻辑推理过程,优化调整,完成感悟,生成逻辑推理核心素养。故此,教师应引导学生在推理中首先梳理、精确逻辑过程,把握推理关键;其次回顾思想方法,凝练特定问题解决的一般路径;最后重新剖析逻辑推理本质,能条分缕析、鞭辟入里,从而达到持续深化<sup>[21]</sup>。例如在学习完空间直线、平面之间的位置关系后,教师应引导学生从探究思路的梳理出发,挖掘本节中定性研究方法及从整体到局部的研究思路,抓住从长方体出发探究直线、平面的位置关系的整体与局部的有机联系;把握将空间图形问题转化为平面图形问题从而解决空间图形的思想方法,体会由易到难的研究直线与平面位置关系的一般思路;对基于图形直观感知的,开展适当针对直线、平面平行与垂直定理说理训练的,加以性质定理的严格证明、综合应用的逻辑推理路径重新进行剖析,以体会有逻辑的思考与表达,前后推理的衔接与连贯,感悟逻辑推理的本质。

高中生数学逻辑推理素养的生成并非是一蹴即至的,而是一个由表及里、逐步推进的过程。教师应在正视学生生成逻辑推理素养价值的基础上,在教学中通过重视双基教学,打好学生生成逻辑推理素养体系的基础;强化数学运算,提升学生的数学问题解决能力;链接推理应用过程,深化学生的逻辑思

维;渗透数学文化,升华逻辑推理素养;引导学生反思,感悟逻辑推理的本质。最终完成学生逻辑推理素养的内化与生成,以达到既教书又育人的目的,促进学生具备终身发展应有的核心素养。

#### 参考文献:

- [1][17][19] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京:人民教育出版社,2020:5,7,4.
- [2] 李华清. 逻辑推理:高中数学学科核心素养的意蕴细究[J]. 数学教学通讯,2021(7下):45-46.
- [3][8] 周春荔. 数学思维概论[M]. 北京:北京师范大学出版社,2012:117,16.
- [4] 鲍建生,周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海:上海教育出版社,2009:178.
- [5] 史宁中,王尚志. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)解读[M]. 北京:高等教育出版社,2020:85.
- [6] 谢先成. 基于核心素养的《普通高中数学课程标准(2017年版)》解读:访数学课程标准修订组组长、东北师范大学原校长史宁中教授[J]. 教师教育论坛,2018(6):4-7.
- [7][10] 吕世虎,吴振英. 数学核心素养的内涵及其体系构建[J]. 课程·教材·教法,2017,37(9):12-17.
- [9] 李艺,钟柏昌. 谈“核心素养”[J]. 教育研究,2015,36(9):17-23,63.
- [11] 孔凡哲,曾峥. 数学学习心理学[M]. 北京:北京大学出版社,2009:60-62.
- [12] 李松林. 学科核心素养的发展机制与培育路径[J]. 课程·教材·教法,2018,38(3):31-36.
- [13] 涂荣豹. 试论反思性数学学习[J]. 数学教育学报,2000(4):17-21.
- [14] 沈文选,杨清桃. 数学技能操握[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018:1.
- [15][21] 徐斌艳. 核心素养与课程发展丛书·数学核心能力研究[M]. 上海:华东师范大学出版社,2019:185,186.
- [16] 侯宝坤. 高中生数学逻辑推理能力的影响要素及评价指标[J]. 教学与管理(中学版),2021(2):39-42.
- [18] 章建跃. 核心素养导向的高中数学教材变革(续1):《普通高中教科书·数学(人教A版)》的研究与编写[J]. 中学数学教学参考,2019(7上):6-11.
- [20] 史宁中. 试论数学推理过程的逻辑性:兼论什么是有逻辑的推理[J]. 数学教育学报,2016(4):1-16,46.

**【作者简介】**郭妍(1997-),女,河南鹤壁人,湖州师范学院教师教育学院,硕士生;沈建民(1965-),男,浙江湖州人,湖州师范学院教师教育学院,教授,硕士生导师(浙江湖州313000)。

**【原文出处】**《教学与管理》:理论版(太原),2023.1.94~97