

# 高中生复数学习水平与表现分析

彭艳贵

**【摘要】**判断课程实施在多大程度上实现了预设目标时,对学生的学习表现进行评估符合教育发展的基本目标.为了深入刻画高中生在复数学习中的表现,以测试的形式对高中生的复数学习表现进行研究,反映出高中生在复数学习过程中对复数概念、运算等关键内容缺少本质的理解,在核心素养生成方面还存在不足.强调教学中应该对复数知识结构的完整性和复数的引入方式等加以强化.

**【关键词】**复数学习;高中生;水平表现

## 一、问题提出

复数在高中数学教育中的基础地位被广泛认可,其在培养学生的创新思维方面体现出了重要的教育价值,在落实核心素养理念、培养学生的必备品格和关键能力方面表现出了重要的意义.

在我国历次修订高中数学课程标准时,复数部分经历了较为明显的波动,尤其是2002年的大量删减后又少量补充,表现出教育发展需求下教育专家在总体课程规划和教学实践等方面的探索.关于高中复数的基础地位,我国著名数学教育家张奠宙表示:内容要更新,但基础绝对不能削弱.当前,关于高中复数的研究主要集中在教学方面.有研究者提出,在高中复数教学中,概念的引入是最难突破的环节,极大地影响着学生对概念的理解和运用,高中复数教学首先要强调并做好复数概念的引入;以复数的几何意义为线索,结合复数的发展历史,逐渐生成复数的概念并展开教学是一种有效的课程处理方式;复数教学不能仅定位于让学生运用公式进行简单的计算,而应该从数系的扩充过程中深刻认识复数.

相关研究中,普遍存在对高中复数内容进一步强化的主张.例如,复数知识的系统性、实数与复数的一致关联性、复数概念的历史背景等.为了深入思考高中复数课程目标达成的实际效度,基于教育是为了促进学生发展的理念,对学生的学习表现进行研究应该是最直接、客观的反映方式.本研究以高中

生的复数学习表现为目标进行测验,检验学生对高中复数知识及相关技能、方法的掌握程度,以及对数学概念、命题及其相互关系的认识和理解.具体研究问题为:(1)高中生复数学习的整体水平与不同水平之间的差异;(2)高中生在复数问题求解过程中的典型表现.基于对这两个问题的分析,结合高中复数的教学目标要求,为高中复数课程发展和具体教学提出建议.

## 二、研究设计

### (一)理论基础

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称《标准》)中将复数设定为必修课程,属于“主题三:几何与代数”部分的基本内容之一,并明确规定“复数是一类重要的运算对象”.学生在高中阶段的复数学习中主要表现为对相关数学知识的记忆、理解和创新.一方面,要达到相关知识的掌握要求;另一方面,要通过对相关知识的理解实现认知水平的发展.结合已有研究,本研究中将高中生的复数学习表现划分为如下四个水平.

水平1:感知水平.学生能够通过具体的复数或有关实例感知某个具体的复数知识;能够解决一次逻辑操作的问题,或者按照个人经验比较容易看出推理过程中的问题.例如,直接判断某个表达式是否为复数,给定复数的直接运算.

水平2:表征水平.学生能够根据记忆中的定理、法则等从形式上对复数有关问题进行计算;能处理

一次较复杂的逻辑操作或依照顺序连续进行多次不太复杂的逻辑操作,最终得到唯一的结论.例如,给定两个复数,求它们和的模.

水平3:关联水平.学生能够在概念的各种表征之间建立联系,在复数试题的解答结构中表现出一定的方法性;能够紧密围绕各部分内容之间的相互联系,适当进行调整和处理,并最终解决问题.

水平4:应用水平.学生能够灵活运用数学知识解决问题,对相关概念或知识点及它们之间的关系非常了解;能够提出假设并将其应用到未知情境.例如,在复数的推理和运算中,可以把复数的有关概念进行延伸拓展,灵活应用复数理论解决问题.

## (二) 研究样本选取

复数属于高中后期的课程内容,受实际条件的限制,本研究以我国某省高三学生为研究总体.按照样本抽样公式,当样本总体很大时,可以用公式  $n \geq \left(\frac{k}{\alpha}\right)^2 P(1-P)$  计算出可信样本大小.(一般设定  $P = 0.50$ ,显著性水平  $\alpha = 0.05$ ,分位数  $k = 1.96$ .)

计算得出样本抽样的大小为  $n \geq 384.16$ ,即研究样本最少要对 385 名学生进行有效测试.研究中还要考虑样本的代表性和便利性,以及学校的师资水平和生源质量等方面的因素,故采用分层抽样与随机抽样相结合的方式,共选取省内 6 所高中的 19 个班级,发放测试卷 902 份,收回有效测试卷 867 份,有效率为 96.12%,符合样本人数要求.被试的分布情况如表 1 所示.

表 1 被试分布情况表

学校	A	B	C	D	E	F	总计
班级数	3	2	3	4	3	4	19
发放测试卷数	131	107	136	185	148	195	902
回收有效测试卷数	126	106	125	178	148	184	867

## (三) 测试工具

《标准》在复数部分主要提出了“复数基本概念”“复数代数形式的基本运算”“复数几何意义”三个方面的基本要求,明确了高中复数的知识维度.因此,测试卷中的复数题目结合知识维度与学习表现的四个水平进行设计,能够较好地体现对知识和学习水平的综合覆盖.具体地,测试卷以三个知识维度为基础进行设计,每个知识维度中都包含对应学习表现四个水平的题项,共计 12 个题项.在实际操作

中,测试卷中复数题目的设计与编制,一方面,充分考虑《标准》在复数部分的基本要求;另一方面,充分征求学科教学专家、数学教育研究者、高中一线教师的意见和建议,坚持適切性和指示性原则,确保达成测试目的.测试卷的评分采用 2 分制,完全正确记 2 分,部分正确记 1 分,完全错误记 0 分,每个水平满分 6 分,测试卷满分 24 分.正式施测前,随机选取 178 名学生进行预测试,确定在内部一致性系数、题项的临界比值、题项与总分的相关性系数、题项在共同因素的因素负荷量等数据指标方面均符合要求,反映出测试卷具有较好的代表性.

## (四) 施测

研究中对选取的样本以班级为单位进行正式测试,测试时间为 40~45 分钟.测试结束后按照评分标准评分,并整理测试结果.经统计分析,得到本次测试的内部一致性系数为 0.819,表现出较好的信度.

测试卷的编写遵循高效度知识测验的原理,经过咨询,专家在题目的思维水平定义、適切性和表述方式等方面给出了很好的建议.进一步用计算皮尔逊相关性系数的方法检验各水平之间的相关性得到数据如表 2 所示(积差相关系数在 0.4~0.7 之间,为显著相关,大于 0.7 为高显著相关).

表 2 各水平之间的相关系数矩阵

	感知水平	表征水平	关联水平	应用水平	问卷总分
感知水平	1	—	—	—	—
表征水平	0.659**	1	—	—	—
关联水平	0.498**	0.488**	1	—	—
应用水平	0.463**	0.414**	0.453**	1	—
问卷总分	0.797**	0.800**	0.808**	0.743**	1

统计结果显示,各水平与问卷总体相关程度较高.一方面,可以作为内部一致性的指标;另一方面,可以作为结构效度的佐证.

## 三、测试结果与分析

### (一) 高中生复数学习表现的整体情况

统计结果显示,测试最低分为 3 分,最高分为 24 分,总体平均分为 14.203 分.按照问卷设计的结构与要求,学生的总体得分表现为中等.在总分的频率分布统计结果中,参与测试的有效学生成绩的众数为 13 和 14,各有 72 人,占比 8.30%,大于等于 15 分

的人数有 422 人, 占到 48.67%, 恰为 12 分有 53 人, 占比 6.11%, 但有 248 人的总分小于等于 11 分, 占到 28.60%.

测试结果反映出高中生复数学习水平总体上处于较为基础的状况, 多数学生处于复数学习的感知水平和表征水平的要求, 比较擅长复数代数形式的四则运算等常规性题目, 能够识记一些基本结论并按照基本的法则进行求解, 但在对知识的准确理解及知识的关联性和应用性等方面还存在一定的不足. 测试卷中设计的感知水平和表征水平题项, 主要是为了研究学生对复数知识及相关方法的记忆和模仿, 以及对基本技能的掌握情况. 按照研究假设, 若高中生达到较高的复数学习水平, 在这两个水平对应的题项上应该有较好的得分表现. 结果显示, 尽管《标准》中对复数内容的要求并不高, 但在测试中仍然有近三分之一的学生得分不足 12 分, 反映出学生在复数知识记忆或形式表征等较为基本的方面仍然存在一定的不足.

### (二) 高中生复数学习不同水平的描述性分析

本研究中将高中生复数学习表现划分为四个水平, 由于测试题目在知识维度和难度水平等方面充分考虑了学生的可接受性, 能力较强的学生能够完成所有题目. 全体测试学生在各个水平上的得分情况如表 3 所示.

表 3 高中生复数学习水平测试各水平得分描述统计量

	N	全距	极小值	极大值	均值	标准差
感知水平	867	6.00	0.00	6.00	4.8201	1.26141
表征水平	867	6.00	0.00	6.00	4.7774	1.59894
关联水平	867	6.00	0.00	6.00	3.0369	1.94877
应用水平	867	6.00	0.00	6.00	1.5686	1.63911

统计结果显示, 学生在高中复数基本内容的感知、常规形式的表征等方面达到了较高的水平, 在关联水平上的表现较为一般, 在应用水平上的表现相对薄弱. 结合教学实践分析, 学生在前两个水平表现较好, 一方面, 这些题目较为基础, 对学生的能力要求不高; 另一方面, 在平时教学中有相应题型、技能、方法的针对性训练. 关联水平的平均分为 3.0369 分, 说明学生对相关知识的深入理解程度不足, 而在应用水平的表现就更低了, 只得到了 1.5686 的平均

分. 在对测试题目的具体分析中, 高中生在复数学习较高水平的表现不佳主要体现为对知识的掌握较为孤立, 对于稍复杂的问题情境不能形成有效的关联, 不能根据条件的不同而进行灵活调整, 擅长直接判断和计算, 但对于不能直接找到答案需要对策略作出选择的题目的解决存在明显的困难, 方法缺少灵活性, 结论判断不具有—般性.

(三) 高中生在复数问题求解过程中表现出的不足

(1) 复数学习熟练于识记内容, 有必要进一步强化本质理解.

在各题项的统计结果中, 对于平均得分较高的题目符合预期和经验判断, 即平时训练较多的常规问题平均得分较高. 例如, 关于复数的较为直接的四则运算题, 平时训练较多, 平均得分为 1.799 分, 尤其是测试卷中复平面上给定三点的三角形形状的判断问题, 形式上不算最简单的问题, 但平均得分仍然较高, 平均得分为 1.655 分, 这进一步说明了这类题目在目前高中复数教学中强调多、练习多. 相反地, 一些得分较低的题目反映出学生的复数学习水平总体表现不高. 例如, 对于问题“若已知方程  $x^2 + (m + 2i)x + (2 + mi) = 0$  至少有一个实数根, 试求实数  $m$  的值.”实际难度并不大, 但却是所有题目中平均得分最低的一道, 仅为 0.398 分. 这种状况是值得深思的. 在测试的后两个较高水平上, 凸显出学生在复数知识的关联性和应用性方面的不足. 学生虽然已经熟记“复数不能比较大小”的结论, 也比较熟悉利用复数相等求解计算的方法, 但很多学生见到一元二次方程形式, 便不加判断地用判别式的方法求得  $\Delta$ , 希望得到大于 0 的结论, 从而求解, 且在没有得到计算结果的情况下, 也没有表现出调整解题策略寻找新方法的意图. 在复数的有关计算中, 学生不能根据复数的本质灵活变通, 也不太习惯把复数作为一个整体进行计算, 常会列出“复数形式的不等式”并试图求解. 再如, 要求根据所学内容在复数范围内求解三次方程  $x^3 - 1 = 0$ . 虽然学生熟悉立方差公式、代数基本定理、复数四则运算等相关内容, 但此题的平均分仅为 0.532 分, 反映出学生对相关复数内容并没有理解其本质, 在对复数的认识上尚有较大的提升空间.

(2) 对复数作为“数”的概念认识存在一定

不足。

系统了解学生在复数学习方面的表现,加强复数与数学学科本身的整合,对高中复数课程发展是非常重要的。在学习认知方面,复数概念的学习具有操作性和结构性特征,学生对复数的认知与所学知识的体系和组织具有明显的关系,复数的代数表示、几何表示、三角表示、指数表示可以帮助学生从不同方面了解复数概念。但实际上,学生比较容易受限于把复数看成实数对的表现形式,而不是把复数看作一个独立的数,这对学生的复数概念学习是不利的。很多学生在较为基础性的概念认识上表现出了明显的问题。例如,判断给定的一组数  $i, -3, \cos \frac{\pi}{5} +$

$i \sin \frac{\pi}{5}, 1 + \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}$  中哪些是复数时,尽管明确知道“实数集是复数集的真子集”,但是判断时却并不把实数  $-3$  和  $1 + \sqrt{3}$  看作特殊的复数。再如,在复数范围内求解方程  $x^2 - 4x + 5 = 0$  时,对于给定的具体方程或关系式,学生能够根据一元二次方程的公式法和负数开方的表示求出方程的根。但相当一部分学生在计算  $\sqrt{-4}$  时,不能将其准确表示为复数的代数形式,这样的表现反映出学生的复数学习一定程度上来源于记忆而不是理解,来源于方法的模仿而不是基于理解的灵活应用,这对于学生认识数系扩充是不利的。高中数学课程内容在设计时提出三个基本原则:基础性,发展性,可行性。复数作为一种特殊的运算对象,产生于方程求解,与实数联系紧密。实数是数系扩充的基础,方程式求解是数系扩充必要性的条件。在学生已经熟练掌握实数及其运算的基础上,加强复数运算是引导学生认识复数的重要途径。同时,加强复数与实数的关联也是必要的。

(3) 复数的引入方式是高中生复数学习的关键。

高中阶段的教材通常用方程  $x^2 + 1 = 0$  或  $x^2 = -1$  的根来引入复数,这种方式自然有其独到之处。首先,其简洁的形式有利于学生的认识和理解;其次,这种方式本质上符合数学史上阿尔冈给出的几何解释。阿尔冈考虑的是  $1, x, -1$  这样的序列,用一种特定的方式将  $1$  转换为  $x$ ,再经过同样的运算将  $x$  转换为  $-1$ 。阿尔冈指出,可以按照乘  $\sqrt{-1}$  的运算来实现,并同时用  $90^\circ$  旋转变换来解释这样的几何意义,这个转换过程就包含着  $x \cdot x = -1$ 。但在教学中,

学生既不知道三次方程式求解过程中的虚数单位  $i$  的引入,也不了解阿尔冈带有几何意义的虚数单位  $i$  的引入。学生通过学习很熟悉  $i^2 = -1$  这样的结论,但对于这样用规定方式给出的内容,由于缺少对运算背景的认识,很多学生只知道  $\sqrt{-1} = i$ ,但却不能在具体问题情境中准确判断出  $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i, \sqrt{-3} = \sqrt{3}i, \dots$ ,这也说明学生对复数产生的必要性缺乏认识 and 了解,对复数知识的理解还停留在比较具体的结论上,缺少自我判断能力,不能深入思考结论的深层次含义,不利于学生数学核心素养的发展。

#### 四、建议

(一) 高中复数课程的发展应更加关注体系完整性

在传统数学教育中,分散难点是课程的根本原则之一,但如果过分夸大或过于简单化就会出错,因为教学内容若被分割为联系薄弱的片断,数学的综合思想和策略就会被忽视,数学内容很容易被学生看成孤立问题的集合,这种原则被异化的现象在课程开发中尤其要注意。高中复数的基本目标之一是表现数系扩充,学习复数就是学习如何从实数系扩充到复数系的过程,这个过程包括问题的起源、矛盾的所在、复数出现的必要性。将整个数系看成一脉相承的整体,会使得学生在学习过程中迁移以往的经验,更容易接受复数,这样既符合学生当前的学习要求,也满足学生今后发展的需要。

(二) 进一步审视高中复数的核心概念

按照布卢姆的结构课程理论,数学教学中应该传递给学生本学科中的基本结构和观念,高中复数中的核心概念起到对这部分内容的支撑、传递基本结构和观念的作用。过于简化的复数内容和结构可能会使得学生的学习和理解缺少必要的支撑而不能形成恰当的认知结构。因此,复数的一些核心概念应该进一步强化。复数的多种表示形式代表了复数的不同属性和特征,同时具备代数、向量、三角等方面的功能。这是复数的一个重要特征,掌握多种形式的复数表征形式对于深入理解复数是重要的。例如,复数的模是几何意义和三角表示中重要的量,也是度量的一种具体表现形式,从度量又可以引申到极限这一重要的微积分概念,从而发展为更为广阔的复数理论。因此,重视复数的模有利于为学生后续学习以复数为基础的分析理论奠定坚实的基础。对复数

核心概念的适当强化有助于促进学生的创新性思维发展和学习领域拓展。

### (三) 强化虚数单位 $i$ 引入的情境性

虚数单位  $i$  是复数部分的起始内容, 是学生对数的概念认识过程中的新鲜事物, 也是学生理解复数的关键要素。首先, 对于虚数单位  $i$  需要明确其来源, 熟悉其表征方式和运算依据等。以简化方程  $x^2 + 1 = 0$  的解的形式引出虚数单位  $i$  的特点是形式比较简洁, 从形式上接受起来比较容易, 但单纯的这种方式不足以揭示复数的概念, 甚至会掩盖复数的本质。若后续复数内容一直缺少复数产生的背景等相关内容, 将脱离本来的数学意义, 很容易让学生误以为虚数单位  $i$  这个符号是随意构造出来的, 况且也与复数的历史发展相差甚远, 又怎么体现复数引入的必要性和合理性呢? 不难否认, 求解方程  $x^2 = -1$  给出了复数与方程之间关系的提示, 让学生在形式上认识虚数单位  $i$  相对容易。但这还远远不够, 在学生能够从形式上认识复数之后, 还应该想办法促使学生在本质上理解复数。

### (四) 适当融入数学史内容, 加强教学文化内涵

复数的产生和发展是数学发展历史上的重要内容, 这个过程符合学生的认知观念的发展过程, 并且认知的历史维度和文化基础已经是当前研究中的重要内容。以课程为载体的高中生数学学习作为特定的认知形式需要考虑其历史和文化因素, 虚数的出现就是历史背景下的数学认识变化过程。同时, 数学知识的历史发展过程在一定程度上反映了有关知识的逻辑关系和在思维上被接受的难易程度。因此, 高中复数部分的教学应该尤其重视与数学史和数学文化的融合。

## 五、结束语

复数是基础教育阶段数学课程发展到一定阶段的自然延伸, 在培养学生的数学核心素养方面是有益的。对高中生复数学习水平的测试与分析是对高中生关于复数内容学习实际情况的一种探索。研究表明, 当前的高中复数既要坚实基础, 把握课程的主线, 更要注重学生对知识的本质理解, 这样才有助于满足学生核心素养发展的需求, 注重本质理解的高效学习更符合“双减”政策的本质。教师在高中复数内容的设计和处理中, 除了高考因素的影响外, 还可以在知识展开、教学方法等方面进行探索, 采取适当

的方式增强高中生复数学习的效果。

### 参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 邹一心. 我亲见亲闻的张奠宙教授的妙语趣事[J]. 数学教学, 2019(5): 49-50.
- [3] 王海青. 数学史视角下“数系的扩充和复数的概念”的教学思考[J]. 数学通报, 2017, 56(4): 15-19.
- [4] 吕天玺, 王光明. 基于数学核心素养的“复数”教学设计[J]. 数学通报, 2018, 57(6): 39-43.
- [5] 李昌官. 布卢姆认知目标新分类指导下的数学教学设计: 以“数系的扩充与复数的概念”教学设计为例[J]. 数学教育学报, 2012, 21(3): 67-71.
- [6] 彭艳贵. “中国”“美国”“新加坡”“英国”“澳大利亚”高中数学课程标准复数内容比较研究[J]. 数学教育学报, 2019, 28(1): 49-54.
- [7] 鲍建生, 周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海: 上海教育出版社, 2009.
- [8] 吴明隆. 问卷统计分析实务: SPSS操作与应用[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2010.
- [9] 邱皓政. 量化研究与统计分析: SPSS(PASW)数据分析范例解析[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2013.
- [10] ANEVSKA K, GOGOVSKA V, MALCHESKI R. The Role of Complex Numbers in Interdisciplinary Integration in Mathematics Teaching[J]. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2015(191): 2573-2577.
- [11] NORDLANDER M C, NORDLANDER E. On the Concept Image of Complex Numbers[J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2012, 43(5): 627-641.
- [12] BIEHLER R, SCHOLZ R W, WINKELMANN B, 等. 数学教学理论是一门科学[M]. 唐瑞芬, 李俊, 李旭辉, 等译. 上海: 上海教育出版社, 1998.
- [13] BAGNI G T. Bombelli's Algebra and a New Mathematical Object[J]. For the Learning of Mathematics, 2009, 29(2): 29-31.

【作者简介】彭艳贵, 鞍山师范学院数学与信息科学学院。

【原文出处】《中国数学教育》: 高中版(沈阳), 2022. 11. 3~7, 12

【基金项目】辽宁省教育厅2020年度科学研究经费项目——高中生复数理解水平的测评研究(SYSF202008)。