

数学核心素养在初中阶段的主要表现之模型观念

鲍建生 章建跃

【摘要】数学建模是数学应用的基本途径,也是一种理解数学知识、感悟数学思想方法的活动方式,加强中小学阶段的数学建模活动已经成为国际数学教育的一个发展趋势.模型观念主要是指对运用数学模型解决实际问题有清晰的认识.在经历核心概念的发生、发展过程中,在解应用题及项目式学习等活动中,学生可以逐步形成这样的认识.在阐释模型观念的内涵及其主要表现行为的基础上,对发展学生的模型观念提出建议.

【关键词】模型观念;数学建模;表现行为;教学策略

一、概述

数学的研究对象是现实世界中的数量关系与空间形式,研究结果常常表现为具有一般意义的模式.将这些模式应用到其他学科或日常生活,就得到了各种各样的数学模型.因此,数学建模是数学应用的基本方式.

一个完整的数学建模过程包括:在实际情境中,从数学的视角发现问题、提出问题,分析问题、建立模型,确定参数、计算求解,验证结果、改进模型,最终解决实际问题,可以用如图1所示的流程图表示.

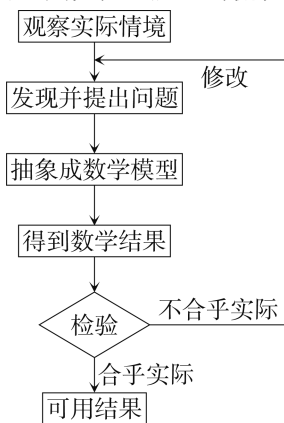


图1 数学建模的一般流程

上述流程表明,数学建模过程比较充分地反映了数学核心素养,即数学观察、数学思考与数学表达.正因为如此,许多国家与组织(包括PISA)提炼数学核心素养的依据就是数学建模过程.

关于中小学数学课程中的数学建模,国际上主要有两种观点:一是把数学建模看作一种特殊的数学应用活动,侧重于构建新的数学模型去解决实际问题;二是把数学建模看作一种学习与理解数学知识的数学活动,侧重于用模型思想去理解数学的各种抽象模式,包括概念、关系与结构.因为中小学数学中的研究对象一般都有明确的现实背景,学生的学习通常都要

经历从现实情境到数学概念的过程,所以在课程设置中可以同时反映这两种观点.在义务教育阶段主要是渗透数学模型的思想,通过简单实例体验数学建模的基本过程;高中阶段则要安排完整的数学建模活动,让学生经历数学建模活动的全过程,包括整理资料,撰写研究报告或小论文,并进行报告、交流等.

下面先讨论初中阶段模型观念的主要表现,再结合课程内容对如何在教学中发展学生的模型观念提出一些建议.

二、模型观念的主要表现形式

与小学阶段相比,初中阶段的数学课程可以提供更多的构造数学模型的“模具”,如方程、不等式、函数,反映分布特征的统计图表等.因此,初中阶段的数学教学中,一方面,可以开展一些简单的数学建模活动;另一方面,初中代数与统计的许多应用问题具备了数学建模活动的部分特征,有助于学生形成与发展模型观念.

新颁布的《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称《标准》)对初中阶段模型观念的内涵界定如下:“模型观念主要是指对运用数学模型解决实际问题有清晰的认识.知道数学建模是数学与现实联系的基本途径;初步感知数学建模的基本过程,从现实生活或具体情境中抽象出数学问题,用数学符号建立方程、不等式、函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律,求出结果并讨论结果的意义.模型观念有助于开展跨学科主题学习,感悟数学应用的普遍性.”

具体而言,初中阶段模型观念的主要表现包含如下几个方面.

(一)通过数学模型,感悟数学与现实世界交流的基本方式

数学模型是数学与现实世界之间互动的主要媒介.一方面,在数学的研究中,人们往往通过数学化的过程,抽象出现实世界事物中蕴含的数量关系与空间形式,生成具体的数学模型,再通过符号化、形式化的

过程形成具有一般意义的数学模式,构建数学的理论体系;另一方面,各种数学理论也可以通过其实际意义,构建具体的数学模型,回到现实世界解决问题.因此,数学模型是数学与现实世界交流的基本语言.在初中阶段,《标准》对此提出了如下几点要求.

(1)经历数学概念、性质、关系的发生、发展过程,感悟数学与现实世界的各种联系.例如,正数与负数可以表示现实世界中各种具有相反意义的量,如果从某个确定的点出发,向东走5米记为5米,那么向西走4米就可以记为-4米,由此可以通过数轴模型描述与分析向东向西走的数量关系与空间形式.

(2)通过寻找数学研究对象(概念、性质、关系)的实际意义,感悟数学对象的一般性.例如,一次函数可以表示两个变量之间的各种线性关系,其中包括匀速直线运动的数学模型,弹簧拉伸长度的数学模型等.

(3)在现实情境中,能够发现简单的数量关系与空间形式,感悟数学应用的广泛性.知道现实世界中的许多问题都蕴含着数量关系与空间形式,可以通过构建数学模型予以解决.例如,面对一座古老的拱桥,既可以从审美的、历史的、物理的、人文的角度提出问题,也可以从数学的角度提出问题.而数学的问题都与数量关系和空间形式有关,可以综合运用各种数学概念、性质、关系予以解决.

除了数学模型以外,数据是统计学与现实世界交流的基本语言.在各种数据处理过程中,同样需要构建合理的统计模型来描述、分析、预测各种不确定现象.虽然数学与统计均属一级学科,但由于统计模型都具有数学原理,而且在中小学课程体系中,统计内容隶属于数学课程.因此,我们常说的中小学数学模型包括统计模型.

(二)能运用方程、不等式、函数、统计量、分布、概率等工具构建模型,解决简单的实际问题

数学也被称为关于模式的科学.所谓模式(pattern),通常是指具有一般意义的数量关系与空间形式.在初中阶段,方程、不等式、函数、平均数、方差等都可以看作是一种模式,当模式被运用于具体情境并获得具体的相关数值(模型参数)后,模式就成为具体的数学模型.因此,在初中阶段的各种数学应用活动中,都一定程度地蕴含着模型思想.这方面的具体表现包括如下几个方面.

(1)在方程、不等式、函数等概念的形成过程中感悟数学模型思想.知道方程、不等式与函数是解决问题的基本模式,具有一般化的意义.例如,正比例函数是对各种正比例关系的抽象结果,可以反映两个具有正比例关系的变量的变化规律.

(2)能够根据实际问题的条件,选择合适的方程、不等式或函数类型,构建具体的模型并解决问题.例如,知道匀速直线运动可以用一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 来描述,如果已知飞机起飞8分钟后离机场

50km时可以达到巡航高度,并以每分钟145km的速度巡航飞行,那么就可以构建飞机飞行距离 y 与时间 t 的数学模型 $y = 145(t - 8) + 50 (t > 8)$.

(3)能够制作统计图表表示数据的统计特征与分布.统计分析的主要方式就是利用各种统计模型对所获得的数据进行定量处理.在初中阶段,一些能够反映数据统计特征的统计量(如平均数、中位数、四分位数、方差等)及直观反映分布规律的统计图(如饼图、折线图、频数分布直方图、箱线图图)可以看作是初步的统计模型.通过各种统计活动,可以初步感悟统计模型在数据分析中的意义.

上述数学应用可以看作是结构良好的、简单的数学建模活动.在这种活动中,一般只要求学生依据实际问题的类型特征,找到已有的、常规的数学方法和工具,利用题设或测量获得相关的数值,进而解决问题.

(三)经历从现实情境中提出问题,构建模型解决问题的过程,感悟数学建模的思想方法

狭义的数学建模一般针对真实的现实问题情境,经历提出问题、建立模型、计算求解、检验结果、修正模型、解决问题等多循环过程,可以综合地反映一个人的数学素养水平.对于大多数初中生来说,对这种意义上的数学建模活动有一些初步的感受即可.具体要求包括如下几个方面.

(1)通过阅读材料、观摩案例,了解数学建模活动的基本过程,感悟运用数学模型解决真实问题的方法与意义.

(2)在一些真实的、开放的问题中,能够用已掌握的方程、不等式、函数等知识去模拟具体情境,构建近似模型解决简单的实际问题.例如,可以把拱桥的轮廓看作抛物线,通过收集实际数据,构建二次函数模型,解决相关的实际问题.

(3)通过各种具体的统计活动案例,理解解决统计问题的一般流程,感悟统计模型在处理不确定现象时的作用与意义.

(4)能针对数学建模过程的某个环节提出或解决简单的问题.例如,能在实际情境中提出有意义的问题,能依据实际情境评价所建立模型的合理性,能理解和解释所得建模结果的实际意义等.

上述形式的数学建模活动是高中阶段数学课程的基本要求.在初中阶段,可以根据学生的实际情况适度开展相应的建模活动(包括撰写数学建模报告),为高中阶段的学习奠定一定的经验基础.

(四)在跨学科综合与实践活动中,感悟数学模型的普遍性与简洁美

《标准》对跨学科的综合实践活动提出了明确要求(占各学科10%的课时),从而为学生感悟数学应用、形成模型观念提供了更多的机会.具体要求包括如下几个方面.

(1)能够建立已知的数学知识与其他学科知识

之间的联系.例如,知道几何中的角度与斜坡的坡度之间的关系,知道物质的密度、液体的浓度等都可以用百分数表示,知道三角形的重心与物理中的重心之间的关联和区别,等等.

(2)能够在跨学科的综合与实践活动中运用数学知识与方法构建有学科背景的简单模型,解决跨学科的实际问题.例如,可以建立一次函数模型进行摄氏温度与华氏温度之间的换算,用二次函数 $h = \frac{1}{2}gt^2$ 研究自由落体运动等.

(3)知道将数学模型运用于跨学科情境时都需要经过简单化、形式化等抽象过程;初步感悟数学的高度抽象性带来的广泛应用性及数学模型的简洁性,欣赏数学的审美价值.

事实上,大多数应用性很强的数学模型的命名,都依赖于所描述的学科背景.例如,生物学中的种群增长模型,气象学中的大气环流模型,经济学中的组合投资模型,社会学中的人口发展模型,等等.因此,通过跨学科的建模活动,可以使学生会到数学模型作为一种普适性的语言在其他学科中的实际作用.

三、在数学概念的发生、发展过程中感悟模型思想

与小学阶段相同,数学化的过程也是初中阶段形成和发展模型观念的有效途径.特别地,初中阶段的数学概念一般都给出了明确的定义,而在形成概念定义的过程中,既涉及数学抽象过程,也常常含有数学建模活动.正因为如此,数学的核心概念中往往蕴含着数学基本思想.要充分重视数学核心概念的发生、发展过程.

下面,我们通过一次函数的引入设计,考查核心概念的发生、发展过程在培养学生模型观念中的作用.

问题情境:《伊索寓言》中有这样一个寓言故事.如图2,一只乌鸦口渴了,到处找水喝.乌鸦看见一个瓶子,瓶子里面有水.可是,瓶子里的水不多,瓶口又小,乌鸦喝着不着水.怎么办呢?乌鸦看见旁边有许多小石子,想出办法来了.乌鸦把小石子一个一个地放进瓶子里,瓶子里的水渐渐升高,乌鸦就喝着水了.



图2

如果把故事改为乌鸦将小石子投进一口深井中使得水面上升,直到能喝到水为止.你觉得这可能吗?

模拟实验:如图3,把水井近似地看作圆柱形,可以用一个圆柱形的玻璃水杯(设直径为60mm)做一个模拟实验.先在一个玻璃水杯中倒入一定量的水,然后在容器中投入相同大小的玻璃珠(设直径为16mm),每投入一颗,测量水面增加的高度,于是可以得到

到一组关于玻璃珠数与水面高度的数据,如表1所示.

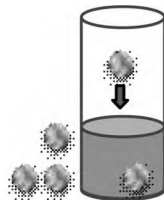


图3

表1

玻璃珠数 x /颗	0	1	2	3	4	5
水面高度 y /mm	40.5	41.26	42.02	42.78	43.54	44.30

猜想规律:由表格中的数据可以猜测出规律为 $y = 0.76x + 40.5$.

验证规律:假设再投入4颗玻璃珠,那么 $x = 9$,代入上式计算可得 $y = 0.76 \times 9 + 40.5 = 47.34$.与测量值进行比对,如果相等那么说明上述猜想正确.经过多次验证后确认猜想无误,说明 $y = 0.76x + 40.5$ 即为所求的数学模型.在这个模型中, y 随 x 的变化而变化,对于 x 的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值与之对应.依据变量与函数的定义,判断 y 与 x 之间具有函数关系,再依据其表达式的形式特征,可以称为一次函数.

模型解释:在一次函数 $y = 0.76x + 40.5$ 中, x 表示向玻璃杯丢进玻璃珠的颗数, y 是玻璃杯中水面的高度,40.5是玻璃杯中原有的水面高度,而0.76是每投入一颗玻璃珠后水面上升的高度,反映了水面升高的快慢程度.水杯的口径越小,或者玻璃珠的直径越大,水面升高的幅度就越大.

解决原始问题:依据上述实验与推导过程可知,原始问题也可归结为一次函数模型.假设这口井的直径是80cm,小石子平均大小为 8 cm^3 ,水面离乌鸦的距离为100cm.我们来考查,乌鸦需要丢入多少颗小石子才能让井水上升100cm?因为井口的直径为80cm,所以井口的横截面积为 $\pi \times 40^2 \approx 5024\text{ cm}^2$,而小石子的体积为 8 cm^3 ,所以每丢进一颗小石子可以使水面上升 $8 \div 5024 \approx 0.00159\text{ cm}$,可取近似值0.0016cm.要使得井水升高100cm,就是求满足 $0.0016x \geq 100$ 的 x 的最小整数值,约为62500颗小石子.假设乌鸦每分钟可以投10颗小石子,那么要使得水面升高100cm,所需时间要超过100小时.看起来不太现实!

模型拓展:好的数学模型不只是解决一个特殊的问题,而是可以解决一类相关的问题.本案例中的数学活动可以从多个角度进行拓展.例如,将自变量从 x 颗玻璃珠改成 $x\text{ mL}$ 的水,从而将离散变量变成连续变量;通过改变玻璃杯已有水的高度,使学生明白初始数值对函数表达式的影响;通过改变玻璃杯的口径大小,理解其对一次函数中一次项系数的影响,感悟函数的变化快慢程度;通过改变玻璃杯的形状,使学生直观了解函数的变化规律,等等.

虽然上述原始问题实际上不用构建一次函数模型也能解决,但此问题情境的教学目的是引入一次函数.通过这种建模过程,可以更好地帮助学生理解一次函数的特征及意义,其中包括函数表达式中两个变量及系数的实际意义,从而感悟函数的模型思想.

四、解决数学应用问题有助于发展模型观念

在小学阶段主要研究的是具体的数量关系,到了初中,有了含字母的代数式后,就可以通过方程、不等式、函数研究具有一般意义的数量关系.将方程、不等式、函数应用于实际情境,可以得到各种具体的数学模型.因此,初中数学中的应用问题是培养模型观念的有效途径.

下面我们来看一个二次函数的应用问题.

例 图4是一座抛物线形拱桥,当拱顶离水面2 m时,水面宽4 m.当水面下降1 m后,水面宽度增加多少?

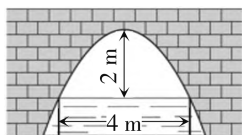


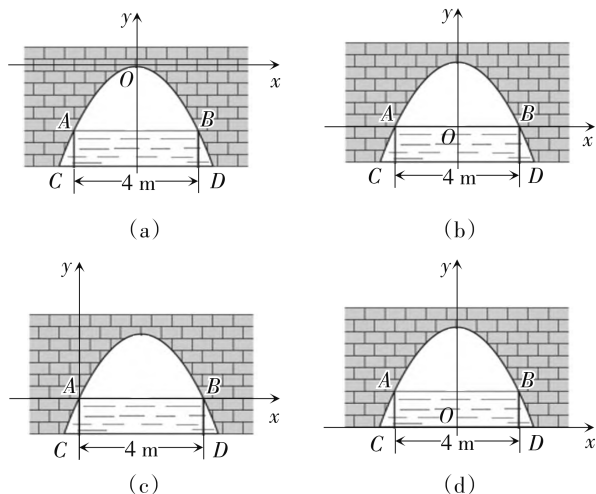
图4

从上述原始问题出发,可以设计不同层次的数学建模活动.

层次1:在已知模型类型特征的前提下,根据给定数据,利用数学工具求出相应的数学模型,解决常规问题.

在已知拱桥轮廓是抛物线的情况下,学生的工作主要是根据实际情况建立平面直角坐标系,依据平面直角坐标系中确定抛物线位置的几何要素,确定二次函数的表达式,用待定系数法求出二次函数模型,然后通过运算获得所求结果.

在解题过程中,学生需要根据实际情况选取合适的平面直角坐标系.从理论上讲,可以建立如图5所示的各种不同的平面直角坐标系.



但考虑到水面高度的不确定性,图5(a)中的方法更符合实际情况.

层次2:根据给定的问题情境,自己提出有意义的问题,构建常规模型,解决问题.

在拱桥情境中,学生可以根据自己的实际经验提出各种常规的应用问题.例如,要想让一条游船顺利通过拱桥,那么对游船的大小规格有什么要求?(学生可以把游船的大小规格简化为游船横截面的大小,并进一步抽象为平面图形,如长方形,或长方形与三角形的组合,然后利用二次函数计算相关的数据);如果想让两条相同规格的游船在拱桥下交会,那么对拱桥的尺寸有什么要求?

在实际情境中提出有意义的问题是数学建模的第一步,也是培养应用意识和创新意识的重要途径.

层次3:根据实际情境,适当改变所设条件,提出开放性的数学建模问题.例如,实地考察或者观察各种桥梁的造型(如图6),构建恰当的函数模型模拟桥拱的轮廓曲线.

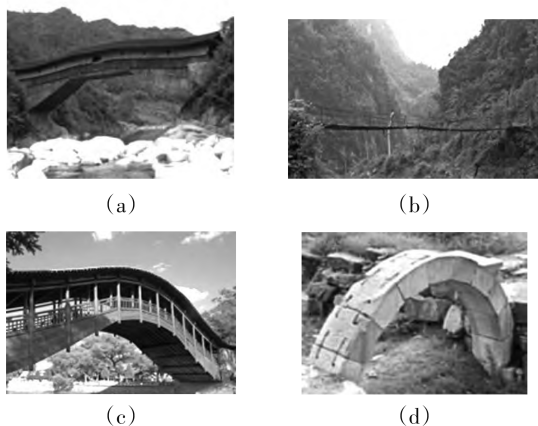


图6

如图7,考虑桥拱的各种建筑设计,从各种角度(成本、桥面的平稳性、桥拱的通过率、两岸的跨度等)进行建模与比较.

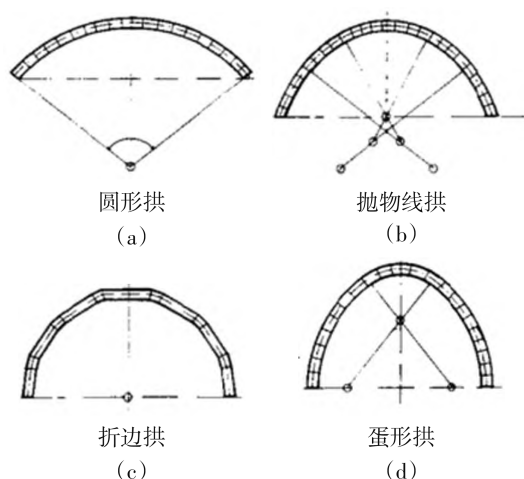


图7 桥拱的设计

根据桥拱的具体建造过程考查相关的数学或跨学科问题。例如,对于传统砖石结构的桥拱,需要考虑重心的位置(如图8(a))与压力的分解(如图8(b))等跨学科问题。

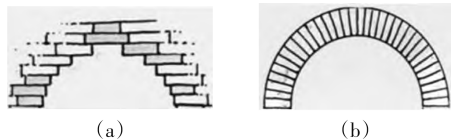


图8

事实上,在各种数学应用活动中都多少包含数学建模的成分,从提出有意义的实际问题到实际情境与数学表征之间的转变,从原始问题的分析、假设、抽象到数学工具、方法的选择,从模型的构建到数学结果的分析、验证,等等。因此,初中阶段培养学生模型观念的主要途径就是加强数学的实际应用。

五、改进数学建模活动的评价方式

从数学建模活动评价的行为指标来看,国际上有两种主要途径:一是通过完整的数学建模任务,考查学生可以到达建模过程的哪个环节,以及相关的行为特征与水平;二是依据数学建模各个环节的表现特

征,分别设置片段式的数学任务,侧重考查学生在某个建模环节中的表现。

上述第一种途径可以更好地反映数学建模的整体性,在多数国内外数学建模竞赛或相关研究中,一般都采用这种形式,并根据数学建模的一般流程开发出了各种过程性评价指标。例如,表2是美国数学及其应用联合会、美国工业与应用数学学会联合构建的数学建模评估表。

从上述评估表可以看到,对学生数学建模活动的评价主要采取的是形成性评价方式,重点是学生自己对建模过程的感悟与反省。教师可以通过学生对相关问题的反馈,了解其在建模活动中的心路历程,进而对学生的数学建模素养表现特征与水平做出评估,发现问题并提出改进建议。

由于初中阶段不要求所有学生都能进行完整的数学建模过程。因此,可以通过第二种途径将数学建模的思想融入日常的数学教学与评价,通过结合具体的数学内容细化模型观念的行为指标,再依据行为指标设计反映数学建模某个环节的片段式样例,考查学生的模型观念的行为特征与水平。

表2 数学建模评估表

建模要素	关于你的模型和你如何建模的问题	需建立的建模词汇
确定问题	你被要求解决的大问题是什么?它可能有一个以上的答案	开放式问题、约束
	你的模型要解决的具体问题是什么?(我的模型会告诉你……)	具体的重点
做出假设	你认为你决定不去尝试的想法是什么?为了解决这个问题,你做了什么假定?你为什么做出这些选择?	消除,优先处理假定或假设的
定义变量	哪些量是重要的?哪些会改变?哪些保持不变?	变量
	你在哪里寻找在你的模型中所用到的数字?	来源、引用
获得解决方案	什么图片、图表或图形有助于人们了解你的信息、模型和结果?	图表、图形、标签
	你用什么数学思想来描述这种情境,并解决你的问题?	情境
分析与模型评价	你如何知道你的计算是否正确?你是否记得使用单位(如美元或英寸)?	计算、单位
	你的模型什么时候有效?你什么时候需要注意模型可能无效?	局限性
	你怎么知道你有一个很好的或实用的模型?为什么你的模型是有意义的?	测试、验证
	如果你期望你的模型更好,你会怎么做?	改进、迭代
报告结果	用语言和数学来解释你的数学模型	测试、验证
	你的每一个队友是如何帮助的?你从你的团队中的每一个成员中学到了什么?	模型、合作
	关于你的模型和(或)解决方案,有哪5件最重要的事情是你希望你的听众或客户了解的?	客户、听众

参考文献:

[1]美国数学及其应用联合会,美国工业与应用数学学会.数学建模教学与评估指南[M].梁贯成,赖明治,乔中华,等译.上海:上海大学出版社,2017.

[2]中华人民共和国教育部制定.义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022.

【作者简介】鲍建生,华东师范大学数学科学学院;章建跃,人民教育出版社课程教材研究所。

【原文出处】《中国数学教育》:初中版(沈阳),2022.12.3~8

原标题:数学核心素养在初中阶段的主要表现之七:模型观念
http://www.rdfyb.com/