

数感的表现标准、单元核心任务 与评分量规

——以人教版教材“万以内数的认识”单元为例

闫云梅 沈艳春 牛佳

【摘要】《义务教育数学课程标准(2022年版)》确立了核心素养导向的课程目标,以“数感”为例,依据课标要求和教材中承载数感培养的典型材料,分析了体现数感进阶的重要维度,提出了数感的表现标准。依据数感表现标准,整体设计“万以内数的认识”单元核心任务序列和评分量规,实现评—学—教一体化,使核心素养“落地”。

【关键词】数感;表现标准;单元核心任务;评分量规

《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称《2022年版课标》)确立了核心素养导向的课程目标。无论是内容要求、学业要求,还是学业质量标准,都在提出的知识目标后面加上一句“形成初步的符号意识、数感、推理意识、模型意识……”这样的表述表明,核心素养不是孤立存在的,而是以学习内容为载体,不同的学习内容承载着不同素养的培养任务。

那么,是不是在达成知识目标的同时,核心素养就自然而然地培养起来了?学生能够完成哪些任务或解决哪些问题就表明他们已经具备了相应的核心素养?如何评价学生核心素养达到什么层级?设计哪些活动能更好地发展学生的核心素养?要回答这些问题,首先需要明确核心素养的表现标准。由于核心素养的表现标准并没有在《2022年版课标》中明确写出来,笔者以数感为例,尝试进行数感表现标准的研制,并依据表现标准对“万以内数的认识”单元核心任务与评分量规进行设计,力求通过评—学—教一体化的单元学习设计,使核心素养落在每个单元的学习中。

一、对照课标与教材,分析进阶维度,研制数感表现标准

研制数感的表现标准,首先要明确数感的内涵及具体行为表现。《2022年版课标》指出:“数感主要是指对于数与数量、数量关系及运算结果的直观感悟。”这里将数感定义为直观感悟。如果仅仅是直观感悟,数感是否可培养、可评价?于是,《2022年版课标》从以下三个方面,给出了数感的具体行为表现。

(1)能够在真实的情境中理解数的意义,能用数

表示物体的个数或事物的顺序。

(2)能在简单的真实情境中进行合理估算,作出合理判断。

(3)能初步体会并表达事物蕴含的简单数量规律。

尽管这样的表述比抽象的数感定义更为具体,但还有两方面问题需要讨论:一是“理解数的意义”是数感吗?与其相应的数感的行为表现是什么?二是《2022年版课标》在不同的学段,对学生数感行为表现的要求有什么不同?

“理解数的意义”包括理解数的数学意义,即“数的本质结构就是计数单位与其个数乘积的累加”^[1];还包括理解数的现实意义,即对数量多少的直观感悟,也就是数感。因此,用“能够在真实情境中感知并估计(或直接说出)数量的多少及进行数量的比较”作为数感的行为表现会更清楚、更具体。

《2022年版课标》在学段目标、内容要求和学业要求中,对不同学段学生数感的发展提出了不同的要求。第一学段的要求是“形成初步的数感”,第二学段的要求是“形成数感”,在第三学段的要求是“进一步发展数感”。“初步的数感”和“数感”究竟有哪些具体行为表现?这就需要系统梳理教材(可以是多版本教材),找出教材中能够承载数感培养的具体材料(例题、习题等),根据经验,按照不同的行为表现、不同的层级找出一些典型材料,通过自上而下和自下而上相结合的方式,结合实例来分析数感进阶的重要维度和表现标准。因为低、中年级是形成数感的关键期,所以这里只研究整数学学习中数感的表现

标准.

下面是人教版教材中几个承载数感培养的典型素材,如图1~图5.



图 1

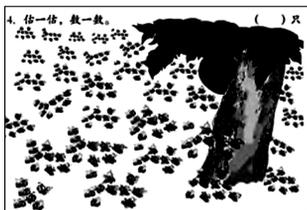


图 2

4 一篇文章500字,丁叔叔平均每分钟录入78个字,6分钟能录完吗?

图 3

用计算器计算下面左边各题。

$$9999 \times 1 = 9999$$

$$9999 \times 2 = \underline{\quad\quad\quad} \quad 9999 \times 5 = \underline{\quad\quad\quad}$$

$$9999 \times 3 = \underline{\quad\quad\quad} \quad 9999 \times 7 = \underline{\quad\quad\quad}$$

$$9999 \times 4 = \underline{\quad\quad\quad} \quad 9999 \times 9 = \underline{\quad\quad\quad}$$

不用计算器,你能直接写出上面右边各题的答案吗?

图 4

你能想象1亿有多大吗?



图 5

图1中的点子个数看一下就可以直接说出来,图2就要数一数、估一估,图5则更复杂.显而易见,体现数感进阶的一个重要维度就是研究对象的数域,数的大小不同,使用的计数单位也不同.20以内数的学习,大多是以“一”为单位,感知更容易;而1亿有多大,需要以万、十万、百万等单位进行估数和估算.因此,用计数单位作为数感表现标准的重要维度,可划分为以下四个不同的层级:“一”是一级,“十”为二级,“百、千”为三级,“万、十万、百万、千万、亿、十亿等”为四级.

数感的具体行为表现中两次提到“真实的情境”,因为“学生核心素养的表现程度需要通过在真实情境中运用所学的知识并能完成某种任务来衡量”^[2].霍雨佳、郭成、杨新荣认为:“数感是由数、运算、估计和情境所组成的一个四面体形状的结构模型,数感的大小由四面体体积的大小所决定.”^[3]四

面体数感结构模型(如图6)形象地表达了情境对发展数感的重要作用.受此启发,笔者对这个四面体结构图进行改造(如图7),以便更清楚地表明情境与数感行为表现的关系.

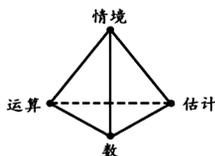


图 6

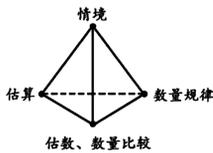


图 7

蔡金法教授指出,根据问题情境是否包含现实生活背景,可以将其划分为现实情境和数学情境,其中现实情境是指生活中的数学现象,而数学情境则丰富地涵盖了数学的表达式、图表、模式等方面.无论是数学情境,还是现实情境,只要不超出学生的理解,都是真实情境.^[4]PISA2022测试依然延续情境的四种类型——个人情境、职业情境、社会情境、科学情境.^[5]按照距离学生生活的远近,可将情境分为四个层次:首先是最贴近学生的个人情境(如图2),其次是学生即将面对的职业情境(如图3),然后是学生日常生活中遇到的社会情境,最后是距离学生最远的科学情境(如图5).如此看来,“情境的复杂度”也是划定数感表现标准的重要维度.

对比图1到图5这五个素材,之所以有难、易的感觉,主要在于问题的呈现方式是不同的,有直观呈现的,有半直观半抽象的,还有抽象的.同时,学生的“认知抽象度或思维卷入度”也不同.图1以直观图的形式呈现,学生通过观察就能直接感知有6个点.图2则需要通过观察、数数或简单推理得出结果.图3还涉及估算策略的选择、数量关系的分析及判断.图5需要学生将抽象的科学情境转化成熟悉的个人情境,将一个大大数通过单位换算转换成容易感知的数量.因此,用“思维的卷入度”作为数感表现标准的重要维度,可划分为以下四个不同的层级:“观察、直观感知”是一级,“数数、计算、简单应用”为二级,“分析、比较、推理、判断”为三级,“抽象、综合、评价”为四级.

综上所述,体现数感的进阶维度主要有四个,分别是:计数单位、真实的情境、问题呈现方式和思维的卷入度.围绕这四个进阶维度,从整体对学生整数学习过程中的数感表现标准进行划分,具体如下页表1所示.

有了数感的表现标准,可以知道第一学段“初步的数感”对应的是层级1到层级3的行为表现,第二学段“形成数感”对应的是层级4的行为表现.

表1 “数感”进阶层级与表现标准

层级1	(1)对于直观呈现的5以内的数量和按规则空间形式排列的数量,能直接说出数量的多少;能通过直观观察比较数量的多少
层级2	(1)对于直观呈现的100以内的数量,能用“十”作单位,感知并估计数量的多少,能用“多得多”“少一些”等比较数量的多少 (2)初步体会并表达通过数数或简单的加、减法计算就能发现的简单规律(重复排列、百以内数的等差数列等)
层级3	(1)在半直观半抽象的真实情境(个人情境为主,少量职业情境、科学情境)中,能用“百”或“千”作单位,感知并估计万以内的数量,能用“多得多”“有几个这么多”等描述数量间的关系 (2)在简单的个人情境中,通过简单(一步)的估算解决问题,作出合理的判断 (3)通过分析、计算、推断等,初步体会并表达事物蕴含的简单规律(万以内数的等差数列、有余数除法的应用等)
层级4	(1)在简单的真实情境(社会情境、科学情境为主)中,能用“万”“十万”“百万”等作单位,将一个大数据转换成容易感知的数量进行估计,能多角度描述数量间的关系 (2)在简单的真实情境中,选择合适的计数单位,通过综合运算,用估算解决问题;能对运算结果的范围作出合理判断 (3)通过观察、比较、抽象、概括,发现多个算式或数量之间的规律,能借助计算器探索并发现大数据运算的规律

二、依据数感表现标准,设计素养导向的单元核心任务序列

单元教学是实现学科核心素养目标的必由之路。^[6]实施单元教学首先要明确单元学习的预期结果。以人教版教材二年级下册“万以内数的认识”单元为例,对教材中承载数感培养任务的例题和习题进行梳理,具体情况如表2。

通过整理发现,对照整数学习过程中“数感”的表现标准,学生在完成本单元学习后,数感的发展应达到层级3。由此,本单元学习目标制订如下。

(1)借助直观模型,认识计数单位千、万,对单位之间的关系有系统的认识。

(2)能运用计数单位进行数数、数的分解和组成(含算盘)、数的读写、数的大小比较等。

(3)理解相同计数单位的数可以直接相加减,能对整百、整千数的加减进行口算。

表2 “万以内数的认识”单元培养数感题目数量及分布

具体表现	真实情境				
	现实情境				数学情境
	个人情境	职业情境	社会情境	科学情境	
倍数及数量的比较	22	3	1	2	0
估算,并作出合理判断	5	0	0	0	0
体会并表达简单数量规律	1	0	0	0	1
总计	35				

(4)在现实情境中感受大数的意义,能用“百”或“千”作单位,感知并估计万以内的数量,能用“多得多”“有几个这么多”等描述数量间的关系。

(5)在简单的个人情境中认识近似数,能用“十”“百”为单位,运用加、减法估算解决问题,作出合理的判断。

(6)初步体会并表达万以内数的等差数列的规律。

在上述单元学习目标中,前三条指向的是知识目标,后三条指向的是数感目标,只有这样才能将素养导向的课程目标落实在每个单元的学习中。

依据单元学习目标,采用逆向设计的方式,对本单元核心任务序列及数感培养点进行设计,具体情况如下页表3所示。

另外,在本单元的学习中,结合整百、整千数加减法的学习,以及运算能力和推理意识的培养,同样可以制定出相应的表现标准,这里不再赘述。

三、依据核心任务设计评分量规,组织与调控课堂教学

要保证核心任务的有效实施,教师在设计任务时要做到以下几点。

(1)基于真实的情境。

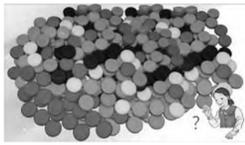
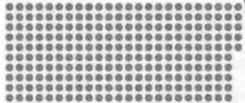
(2)任务的解决蕴含了知识的学习与核心素养的培养。

(3)任务表述要清晰,具有一定开放度,让每个学生都能完成,只是方法或水平不同。

(4)在任务中要嵌入评价时的“要求”,使学生能依据“要求”进行自评和互评。

有了好的学习任务,还需要针对每个核心任务设计相应的评分量规,用以判断学生在完成任务时所达到的水平,并通过不同水平作品的展示及交流,组织与调控课堂教学。

表3 单元核心任务序列及数感培养点

任务序列	表现性任务	数感培养点
任务1: 整理随意夹	1. 李阿姨的文具店进了一批“随意夹”, 估一估, 大约有多少个? 你是怎么想的?  2. 四人一组整理小夹子, 先把几个小夹子装在一个小盒里, 再把几个小盒装在一个大盒里. 想一想, 怎样整理才能使我们又快又方便地数出夹子的个数? 	在直观情境中, 感知并估计万以内的数量
任务2: 制作数位顺序表	请你想办法制作一个数位顺序表, 并配图, 表示出“一”“十”“百”“千”“万”之间的关系.	用一组有结构的直观图表示一、十、百、千、万, 建立视觉上的空间关系
任务3: 多种方式表示数	1. 估一估, 有多少个圆点?  2. 圈一圈, 数一数. 3. 你能用哪些不同的方式(小棒、小盒子、小方块、计数器等)表示这个数?	在直观情境中, 感知并估计万以内的数量
任务4: 借助计数器读数	位于石景山的新首钢大桥长约1354米. 南京长江大桥公路桥长4589米, 铁路桥长6772米.  1. 在计数器上拨出这几个数, 再读一读. 2. 谈谈你对新首钢大桥和南京长江大桥的感受. 3. 在计数器上拨出2080、6009, 并读一读. 4. 你知道万以内的数怎么读吗?	在半直观、半抽象的情境中, 学生将不熟悉的南京长江大桥与熟悉的新首钢大桥建立联系, 用“大约有几个这么长”描述二者关系

续表3

任务序列	表现性任务	数感培养点
任务5: 找规律填数	(1) $\text{---}(\underline{400})\text{---}(\underline{500})\text{---}(\underline{600})\text{---}(\underline{600})\text{---}(\underline{\quad})\text{---}(\underline{\quad})\text{---}$ (2) $\text{---}(\underline{940})\text{---}(\underline{950})\text{---}(\underline{960})\text{---}(\underline{980})\text{---}(\underline{\quad})\text{---}(\underline{\quad})\text{---}$ (3) $\text{---}(\underline{994})\text{---}(\underline{995})\text{---}(\underline{996})\text{---}(\underline{998})\text{---}(\underline{\quad})\text{---}(\underline{\quad})\text{---}$ 1. 把你发现的规律在数列中标出来, 再按规律填一填. 2. 这三列数的计数单位分别是几?	初步体会并表达万以内数的等差数列的规律
任务6: 大约有多少颗珠子	1. 穿一个门帘大约需要6000颗珠子, 估一估, 这里大约有多少颗珠子?  2. 怎样估更方便? 圈一圈, 画一画, 把自己的想法在图中表示出来?	自主选择合适的单位估数
任务7: 用估算解决问题	 324 元 212 元 500元买这两件商品, 够吗? 你能用简便的方法解决问题吗? 你能说清自己的想法吗?	运用加、减法估算解决问题, 作出合理的判断

以任务7为例, 为了降低计算难度的影响, 教师将原教材中的两个数据“358元”和“218元”调整为“324元”和“212元”. 同时, 为了促进学生数感的发展, 突出“对计数单位进行合理选择”“作出合理判断”的行为表现, 教师将“用简便的方法”“说清自己的想法”两项要求嵌入任务中, 这既是学生完成任务时努力的方向, 也是他们自评与互评时的依据.

通过对学生的调研发现, 由于学生第一次遇到用估算解决的问题, 很多学生还没有估算的意识和方法. 在完成任任务时, 不少学生都想到用“ $324 + 212$ ”, 但他们此时还没有正式学习三位数加法, 有的学生不会计算或算错, 也有的学生能根据自己的经验得出正确的结果. 虽然这两类学生的运算能力不同, 但从数感的表现看, 他们都不能根据情境对给出的数据进行处理, 没有估算意识, 因此都属于水平1的情况. 同理, 用“ $320 + 210$ ”解决问题的都

属于水平2的情况.由此,形成该任务的评分量规,如表4.

表4 “用估算解决问题”的评分量规

水平	行为表现
水平1	没有估算意识,对数据没有处理,直接采用计算的方法解答(也许不会计算,也许得出正确结果)
水平2	有估算的意识,用“十”作单位进行估算(也许不会计算,也许得出正确结果)
水平3	有估算的意识,能结合情境用“百”作单位进行估算,用简便的方法解决问题,作出正确的判断,但不能说清自己的想法
水平4	有估算的意识,能结合情境用“百”作单位进行估算,用简便的方法解决问题,作出正确的判断,并能说清自己的想法

有了评分量规,教师在教学中可以及时对学生的作答情况进行水平划分,并收集不同水平的典型作品.在学生独立探究的基础上,教师组织学生进行交流,并按照从低水平到高水平的顺序,逐级反馈学生的作品.通过不同水平作品的展示与交流,学生“内隐”的思维开始“外显”,对水平1到水平4的作答情况也有了直观的认识(如图8~图11).

$$324 + 212 = 536(\text{元})$$

$$536 > 500$$

图8

$$\begin{array}{r} 320 + 210 = 530(\text{元}) \\ \hline 530 \text{元} > 500 \text{元} \\ \hline \text{答:不够} \end{array}$$

图9

$$\begin{array}{r} 200 + 300 = 500(\text{元}) \\ \hline \text{答:不够} \end{array}$$

图10

我觉得500元不够多买,因为300加200等于500,所以300加200肯定比500大。

图11

在此基础上,组织学生用“☆”“☆☆”“☆☆☆”“☆☆☆☆”对不同的作品进行评价并说明理由.学生可围绕“能否正确解决问题”“方法是否简便”和“能否说清想法”展开讨论和评价.在这样的过程中,学生成为评价的主体,通过基于证据的表现性评价,自我监控学习的过程和结果.由于对高水平作品有了清晰的认识,学生可以及时调整自己的估算方法,学习如何作出合理的判断,从而达到发展数感的目的.

经过对任务7的交流、反馈与评价,再解决下面的练习题,学生的表现有了明显的变化,如表5.

表5 不同任务下学生水平统计表

任务	水平			
	水平1	水平2	水平3	水平4
任务7	23	4	5	2
练习题	7	1	12	14

练习题:学校组织一、二年级学生去看电影.一年级有426人,二年级有311人.影院有700个座位,你觉得这些座位够坐吗?请你用简洁的方式说明理由.

通过两次数据的对比看出,学生在完成练习题时,达到水平3和水平4的人数有了明显增加.运用评分量规组织学生进行自评和互评,有效提高了学生自我总结、反思、改进的意识和能力,达到了以评助学、以评促教的目的.

总之,依据核心素养的表现标准,采用评—学—教一体化的单元整体学习设计,可以将抽象的核心素养与具体的学习内容建立关联,让素养可视化、可操作、可评价,真正落实核心素养导向的课程目标.

参考文献:

- [1]刘加霞.把握分数的本质内涵,在比较大小中体验分数的神奇:评于萍老师执教的“分数比较大小”一课[J].小学教学,2011(7/8下):30-31.
 - [2]崔允灏.如何开展指向学科核心素养的大单元设计[J].北京教育(普教版),2019(2):11-15.
 - [3]霍雨佳,郭成,杨新荣.国外数感研究评析及启示[J].课程·教材·教法,2015,35(2):117-121.
 - [4]于国文,闫佳杰.真实情境场域下的问题提出:ICME-14的多城故事与启示[J].教学月刊(小学版),2021(10):58-62.
 - [5]段素芬.突出真实情境聚焦数学推理:PISA2022数学示例的视角[J].中国数学教育(初中版),2022(9):19-27.
 - [6]卢明,崔允灏.学科核心素养呼唤单元教学[J].课程教材教学研究,2020(5):58.
- 【作者简介】闫云梅,北京教育学院石景山分院;沈艳春、牛佳,北京市石景山区金顶街第二小学.
- 【原文出处】《教学月刊》:小学版(杭州),2023.1/2.16~21
- 【基金项目】本文系北京市教育学会“十四五”教育科研2022年度课题“小学数学‘评—学—教’一体化单元整体设计与实践研究”(课题编号:SJS2022-004)的阶段成果.