初中代数推理的教学价值

朱建明 诸士金

【摘要】在初中数学教学中,展开(或者加强)代数推理,可以帮助学生:明依据,加深对代数知识的理解;懂操作,强化对推理方法的掌握;建系统,衔接代数推理的学程。

【关键词】初中数学;代数推理;代数知识;推理方法

《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称“新课标”)特别指出:“初中数学中,在图形与几何领域有推理或证明的内容,在数与代数领域也有推理或证明的内容。”^①这就要求初中数学教师展开(或者加强)代数推理,尤其是演绎推理(数学中的“证明”必须通过演绎推理完成)的教学,也即展开(或者加强)从一定的条件出发,依据代数定义、代数公式、运算法则、运算律、等式的性质、不等式的性质等,得到具体数和代数式结构、数量上的相等关系和不等关系等的教学。本文重点谈一谈初中代数推理的教学价值。

一、帮助学生明依据,加深对代数知识的理解

代数推理(尤其是演绎推理)可以分为运算推理和命题推理这两种主要形式。加强运算推理的教学主要是加强算法、算技背后的算理、算律的教学,引导学生关注运算推理的步步有序和步步有据;加强命题推理的教学主要是加强代数命题结构的认识和结构之间逻辑关系的演绎,帮助学生明白逻辑关系成立背后的代数道理和依据。由此可见,无论是哪一种代数推理的形式,都要关注代数领域内的依据。因此,就要在代数有关内容的教学中,进一步关注代数概念、法则、公式、性质等依据的“再发现”过程。这有利于学生加深对代数知识的理解。

例如,苏科版初中数学七年级上册《4.2 解一元一次方程》第1课时的“等式的性质”教学后,可提出如下问题:

说出下列等式变形的依据:

(1) 由 $x + 3 = -1$, 得 $x = -4$;

(2) 由 $3x = -6$, 得 $x = -2$;

(3) 由 $-\frac{1}{2}x = 4$, 得 $x = -8$;

(4) 由 $5x = -x$, 得 $6x = 0$ 。

说出等式变形的依据,就是运用等式性质的过程,也是认识等式性质的意义和适用范围的过程,还是开展“言必有据”训练的有效载体。实际上,教学初

中数学“数与式”内容中的有关运算性质时,均可进行这样的说理活动,从而既关注学生对每一步依据的本质理解,也培养学生的数学逻辑表达能力。

再如,苏科版初中数学八年级上册《6.3 一次函数的图象》第2课时教学,在导入阶段,可提出如下问题:

(1) 已知一次函数 $y = 2x - 5$ 图象上的任意两点 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$, 如果 $x_1 < x_2$, 判断 y_1 与 y_2 的大小, 并说明理由;

(2) 已知一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象上任意两点 $M(x_3, y_3)$ 、 $N(x_4, y_4)$, 如果 $x_3 < x_4$, 判断 y_3 与 y_4 的大小, 并说明理由。

这两个问题是对“一次函数的单调性”教学所做的铺垫。学生既可以从一次函数的图象上直观地感受其单调性,又可以通过代数推理,包括先取两个特殊点,发现它们纵坐标的大小关系与横坐标的大小关系的关联,再用演绎推理的方法证明。这两个问题的教学可以让学生经历一次函数性质的探索过程,体会其合理性,以加深对函数性质的理解,并体会代数推理的作用。

二、帮助学生懂操作,强化对推理方法的掌握

相对而言,在代数教学中,不少教师比较重视运算推理,因此,不少学生对作为依据的算理、算律并不陌生,对运算推理的操作路径也很明晰。因此,我们应该更重视代数命题推理的教学,在运算求解类问题之外,多设计一些命题证明类问题。由此引发的说理活动更具有推理的普遍特征,有利于学生强化对推理思维方法及其表达体系的掌握,包括对合情推理和演绎推理逻辑方法的掌握和对比较法、综合法、分析法和反证法等证明方法的掌握。

例如,苏科版初中数学八年级下册《12.2 二次根式的乘除》教学,可以让学生通过几何意义(直角三角形的边长和长方形的面积)得到一些具体的二次根式的乘积,再通过这些特例猜想二次根式乘法的运

算性质“ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0)$ ”,然后尝试证明这一性质.当然,可以采用同样的方式教学二次根式

除法的运算性质“ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} (a \geq 0, b > 0)$ ”.

在这一过程中,将原本运算求解类的内容(问题)转换成命题证明类的内容(问题),通过先猜后证,突出命题推理过程的形式化程序和命题推理的方法,使学生充分感受合情推理和演绎推理对研究问题的价值.

再如,苏科版初中数学七年级下册《11.3 不等式的性质》教学,在思维拓展阶段,可提出如下问题:

(1) 已知 $a < 1$, 用不等式的性质说明 $a < \frac{a+1}{2}$;

(2) 已知 $a > b$, 用不等式的性质说明 $a > \frac{a+b}{2}$;

(3) 已知 $a > b > 0$, 比较 a^2 与 b^2 的大小, 并说明理由.

解决这几个问题, 可以使学生真切地感受到综合法、分析法和比较法的作用, 将它们内化为代数命题证明问题的重要工具. 这三种方法中, 综合法是重点和难点; 分析法通常侧重于分析证明思路, 不用于独立地呈现证明过程; 比较法容易理解, 其操作程序也容易固化, 但在初始阶段不易想到, 其表达要求也相对较高. 因此, 在教学中, 可以让学生先学习综合法, 后学习比较法, 同时, 将分析法作为分析思路的手段贯穿始终.

又如, 苏科版初中数学七年级下册《11.4 解一元一次不等式》第2课时教学, 在思维拓展阶段, 可提出如下问题:

小林同学认为: $x > 2$ 时, $\frac{x+1}{3} < \frac{x+2}{4}$. 请你对此作出判断并且说明理由.

本题是一个示错纠错的案例, 可以从 $\frac{x+1}{3} < \frac{x+2}{4}$ 出发, 利用不等式的性质解不等式, 看看能否得到 $x > 2$ 这个条件, 从而作出判断. 这种方法是演绎推理中的分析法. 当然, 解决本题也可以用比较法: 将 $\frac{x+1}{3}$ 与 $\frac{x+2}{4}$ 作差, 利用运算法则与运算律得出结果, 然后根据条件比较结果与 0 的大小……本题可以让学生真切地感受到几种证明方法的作用.

三、帮助学生建系统, 衔接代数推理的学程

初中阶段的代数推理教学相对薄弱. 与之形成鲜明对比的是, 高中阶段有着指向较为完整的代数推理体系的教学内容, 包括函数概念与性质、基本初等函

数、数列的概念与性质、常见数列、导数、常用不等式等知识与问题, 指向各种函数、数列性质以及不等关系的证明等. 因此, 加强初中代数推理的教学, 可以帮助学生建立良好的代数推理学习序列, 系统地衔接代数推理的学程, 让学习螺旋上升、持续进阶. 这能进一步协调初高中对学生代数推理能力的培养.

例如, 苏科版初中数学八年级下册《8.3 分式的加减》《8.4 分式的乘除》教学, 可将教材例题、习题中的部分计算题改造为证明题:

(1) 求证: $\frac{a^2}{(b-a)^2} - \frac{b^2}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b}$;

(2) 求证: $1 - \frac{a-2}{a} \div \frac{a^2-4}{a^2+a} = \frac{1}{a+2}$;

(3) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 求证: $\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a-b} - \frac{b^2}{a^2-b^2} = \frac{1}{5}$.

再如, 苏科版初中数学九年级上册第1章《一元二次方程》教学, 也可将教材例题、习题中的部分解方程题改造为证明题:

(1) 求证: 关于 x 的方程 $x^2 + (2k-1)x - k - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根;

(2) 求证: 关于 x 的方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$ 有两个相等的实数根;

(3) 求证: 关于 x 的方程 $(x-1)(x-2) = k^2$ 有两个不相等的实数根.

这样的改造虽然呈现了原先计算、解方程的结果, 但是提高了演绎推理的形式化要求, 能够改善代数学习中“会计算, 不会说理”的状况, 为学生到高中接触较多推理要求比较明显的代数问题做好铺垫.

注释:

①中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 144.

参考文献:

[1] 史宁中. 数学基本思想与教学[M]. 北京: 商务印书馆, 2018.

【作者简介】朱建明, 江苏省南京市教学研究室(210001); 诸士金, 江苏省南京市鼓楼区教师发展中心(210009).

【原文出处】《教育研究与评论》: 中学教育教学版(南京), 2022. 12. 29 ~ 31

【基金项目】本文系江苏省中小学教学研究第十三期课题“发展初中生代数推理能力的实践研究”(编号: 2019JK131017)的阶段性研究成果.