

初中生代数推理能力的培养

陈书才 董建功

【摘要】推理能力是《义务教育数学课程标准(2022年版)》提出的初中数学核心素养之一,《2022课标》在数与代数领域加强了对代数推理的培养,文章分析了人教版教科书中代数推理编排情况,分析了近5年安徽中考题中有关代数推理的考查情况,最后提出培养代数推理的几点策略。

【关键词】代数推理;推理能力;数学思想方法;核心素养

一、前言

《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称《2022课标》)提出数学核心素养在初中阶段主要表现为:抽象能力、运算能力、几何直观、空间观念、推理能力、数据观念、模型观念、应用意识、创新意识^[1]. 数学素养与 PISA(Program for International Student Assessment, 国际学生评价项目,简称 PISA)密切相关,数学推理在 PISA2012 数学素养中的定义已经出现, PISA 2021 将数学推理作为数学素养内涵的第一要素予以明确^[2]. TIMSS 2019(The Trends in International Mathematics and Science Study, 国际数学与科学教育趋势研究,简称 TIMSS)数学评价框架分为内容与认知两个维度. 内容维度主要评价学生数学知识的理解与掌握情况,认知维度主要评价学生解决数学问题过程中的思维过程与水平,“认知维度”包括“知道”“运用”“推理”三级水平^[3]. 由此可见,数学推理一直是国内外数学教育研究的热点之一. 培养学生的数学推理能力是数学教学的重要目标.《2022课标》在课程内容要求上,数与代数领域加强了代数推理^[4].《2022课标》还有一个明显特征就是强调代数的逻辑证明,明确给出了若干个代数的基本事实,用于代数结论的证明,并且把与“韦达定理”有关的选修内容变为必修^[5]. 关于数学推理的教学研究,几何推理教学的研究远远超过其他数学内容,占主要的地位^[6]. 代数推理被视为学生在数学与科学方面取得进步的“守门人(gatekeeper)”. 代数推理往往涉及对数学结构的探索,而这是进行一切数学思考的基础,寻找、识别、概括与运用、潜在的数学结构组成了代数推理的几个重要方面^[7]. 通过以上分析可知,代数推理越来越得到更多的重视,有必要加强对代数推理的研究.

二、人教版数学教科书中代数推理编排分析

初中数学主要有“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“图形与几何”四大知识板块,分析教科书中“数与代数”内容分布情况,根据内容分布,形成大概念,大单元的教学观,从总体上把握代数推理在全套教材所占比重,做到心中有数,有助于更好的推进

对代数推理能力的培养. 通过统计分析人教版数学教材代数推理内容,见表1,发现“数与代数”内容领域呈现螺旋上升式编排的特点. 人教版初中数学教科书总共有29章内容,“数与代数”领域总共占比以14/29,将近二分之一,以7年级教材为例,7年级总共占教材比重为6/29,7年级上册数学教材总共有四章内容,其中“数与代数”内容领域中包括有理数、整式的加减、一元一次方程三章内容,占总书的四分之三,可见刚进入7年级阶段,数与代数领域占了大部分内容,教材这样编排的目的也是更好地完成小初衔接,促进学生思维的转换,所以对于代数推理的能力的培养应尽早,促进学生高阶思维能力的提升.

表1 人教版初中数学教材“数与代数”内容分布

年级	关于“数与代数”章节内容	所占教材比重
7年级上册	有理数、整数的加减、一元一次方程	3/29
7年级下册	实数、二元一次方程、不等式与不等式组	3/29
8年级上册	整数的乘法与因式分解、分式	2/29
8年级下册	二次根式、一次函数	2/29
9年级上册	一元一次方程、二次函数	2/29
9年级下册	反比例函数、锐角三角函数	2/29

三、中考试题中代数推理分析

中考试题对课堂教学具有一定的导向作用,以安徽省2018年到2022年5年中考试题为例进行分析,见下页表2,统计分析发现近5年安徽中考都是以大题的形式对代数推理进行考察,分值占比较高,说明安徽省对学生代数推理能力的培养比较重视,代数猜想与证明已经成为安徽中考命题的一大特色.

四、代数推理能力的培养方法

(一)养成认真观察的习惯,发展代数推理能力

观察力是人的智力的重要组成部分,观察是人的一种有目的、有计划、持久的知觉活动,是知觉的高级形式,因此观察又叫“思维的知觉”. 应充分留给学生足够的时间和空间经历观察分析题目的条件.

表2 2017—2022年安徽中考代数推理大题分布

年份	题号及内容	分值
2018年	18题 观察等式规律猜想并证明	8分
2019年	18题 观察等式规律猜想并证明	8分
2020年	17题 观察等式规律猜想并证明	8分
2021年	18题 观察等腰直角三角形规律猜想并证明	8分
2022年	18题 观察等式规律猜想并证明	8分

例1 (安徽省2021年中考题) 某矩形人行道由相同的灰色正方形地砖与相同的白色等腰直角三角形地砖排列而成,图1表示此人行道的地砖排列方式,其中正方形地砖为连续排列.

观察思考 当正方形地砖只有1块时,等腰直角三角形地砖有6块(如图2);当正方形地砖有2块时,等腰直角三角形地砖有8块(如图3);以此类推.



图1



图2



图3

规律总结

(1)若人行道上每增加1块正方形地砖,则等腰直角三角形地砖增加_____块.

(2)若一条这样的人行道一共有 n (n 为正整数)块正方形地砖,则等腰直角三角形地砖的块数为_____(用含 n 的代数式表示).

问题解决

(3)现有2021块等腰直角三角形地砖,若按此规律再建一条人行道,要求等腰直角三角形地砖剩余最少,则需要正方形地砖多少块?

解 (1)由图可知,每增加一块正方形地砖,即增加2块等腰直角三角形地砖,
故答案为:2.

(2)由(1)可知,每增加一块正方形地砖,即增加2块等腰直角三角形地砖;

所以当地砖有 n 块时,等腰直角三角形地砖有 $(2n+4)$ 块;

故答案为: $2n+4$.

(3)令 $2n+4=2021$,则 $n=1008.5$;

当 $n=1008$ 时, $2n+4=2020$.

此时,剩下一块等腰直角三角形地砖,所以需要正方形地砖1008块.

分析 本题考查了学生的观察、发现、归纳以及应用的能力,解题的关键是发现规律,涉及列代数式表示其中的规律,一元一次方程及其一元一次不等式的应用等.

(二)引导学生大胆猜想,演绎证明

猜测和检查作为代数推理的一种形式,系统的猜测和检查是一项重要的技能.由猜想到证明,由特殊到一般,从归纳推理到演绎推理,体现了学生推理能力

力的提升.波利亚在《数学与猜想——合情推理模式》中写道:数学家的创造性工作的结果是论证推理,是一个证明,但证明是由合情推理,是由猜想来发现的.并向教师们呼吁:“让我们教猜想吧!”^[8]设计一系列的猜想活动,有助于为问题解决提供思路,提升学生的分析问题、解决问题的能力,进而通过演绎推理证明猜想,使发现的结论更有一般性,进而提高学生的推理能力,提高学生的核心素养水平.

例2 (安徽省2022年中考题) 观察以下等式:

$$\text{第1个等式: } (2 \times 1 + 1)^2 = (2 \times 2 + 1)^2 - (2 \times 2)^2,$$

$$\text{第2个等式: } (2 \times 2 + 1)^2 = (3 \times 4 + 1)^2 - (3 \times 4)^2,$$

$$\text{第3个等式: } (2 \times 3 + 1)^2 = (4 \times 6 + 1)^2 - (4 \times 6)^2,$$

$$\text{第4个等式: } (2 \times 4 + 1)^2 = (5 \times 8 + 1)^2 - (5 \times 8)^2,$$

.....

按照以上规律,解决下列问题:

(1)写出第5个等式:_____;

(2)写出你猜想的第 n 个等式(用含 n 的式子表示),并证明.

解 (1)根据题目中前4个等式,可以发现式子的变化特点,从而可以写出第5个等式; $(2 \times 5 + 1)^2 = (6 \times 10 + 1)^2 - (6 \times 10)^2$;

$$(2) \text{第} n \text{个等式为 } (2n + 1)^2 = [(n + 1) \cdot 2n + 1]^2 - [(n + 1) \cdot 2n]^2,$$

证明如下:

$$\text{等式左边} = 4n^2 + 4n + 1,$$

$$\text{等式右边} = [(n + 1) \cdot 2n + 1 + (n + 1) \cdot 2n] \cdot [(n + 1) \cdot 2n + 1 - (n + 1) \cdot 2n] = 4n^2 + 4n + 1,$$

故等式成立.

分析 本题考查等式规律的探索,并能进行代数证明,考查了学生的观察、发现、归纳以及应用的能力,解题的关键是发现规律,并能列代数式表示其中的规律,并能证明自己的猜想,验证猜想的正确性.等式的规律探索题通常给出一组代数式,等式或者不等式等,要求学生通过观察、分析、猜想来探索规律,体现了从特殊到一般的数学思想.

(三)传授数学思想方法,提高代数推理能力

“授人以鱼,不如授人以渔”,数学思想方法在数学教学中起到灵魂的作用,数形结合思想方法是常用的数学思想方法之一,“数”与“形”在一定程度上可以相互转化、相互渗透,通过数形结合可以达到化繁为简的作用,用代数法进行几何证明,有助于使研究问题简化,达到简洁证明的作用,在一定程度上体现了数学的简洁美.

例3 (安徽省2021年中考题) 已知抛物线 $y = ax^2 + 2x + 1$ ($a \neq 0$)的对称轴为直线 $x = 1$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 都在此抛物线上, 且 $-1 < x_1 < 0, 1 < x_2 < 2$, 比较 y_1 与 y_2 大小, 并说明理由;

(3) 设直线 $y = m (m > 0)$ 与抛物线 $y = ax^2 - 2x + 1$ 交于点 A, B , 与抛物线 $y = 3(x-1)^2$ 交于点 C, D , 求线段 AB 与线段 CD 的长度之比.

解 (1) 由题意得 $x = -\frac{-2}{2a} = 1$, 则 $a = 1$;

(2) 因为抛物线对称轴为直线 $x = 1$, 且 $a = 1 > 0$, 所以当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而减小;

当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而增大.

所以 $-1 < x_1 < 0$ 时, $1 < y_1 < 4$; $1 < x_2 < 2$ 时, $0 < y_2 < 1$, 所以 $y_1 > y_2$.

(3) 令 $x^2 - 2x + 1 = m$, 则 $x^2 - 2x + (1 - m) = 0$, 故 $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (1 - m) = 4m$, 所以 $x = 1 \pm \sqrt{m}$, 故 $x_1 = \sqrt{m} + 1, x_2 = -\sqrt{m} + 1$.

因为 $AB = |x_1 - x_2|$, 所以

所以 $AB = 2\sqrt{m}$,

令 $3(x-1)^2 = m$,

故 $x_3 = \frac{\sqrt{3m}}{3} + 1$,

$x_4 = -\frac{\sqrt{3m}}{3} + 1$,

所以 $CD = |x_3 - x_4| = \frac{2\sqrt{3m}}{3}$,

即 $\frac{AB}{CD} = \frac{2\sqrt{m}}{\frac{2\sqrt{3m}}{3}} = \sqrt{3}$,

所以 AB 与 CD 的比值为 $\sqrt{3}$.

分析 本题考查二次函数的图象性质、二次函数的解析式、对称轴、函数的交点、正确理解二次函数的性质是关键, 线段长度的表示方法是解题的重点. 其中第一问是解决后面两问的基础, 第二问是考察函数增减性问题, 一般学生都能掌握, 第三问是用代数方法解决长度问题, 典型的代数方法解决几何问题, 通过画图得到二次函数简单的图象, 利用数形结合的思想, 使问题的求解得到简化.

(四) 呈现代数推理的过程, 提高代数推理能力

学生刚进入中学数学的学习, 推理步骤和推理难度都有所增加, 通过前面分析发现“数与代数”内容领域在 7 年级教材中占比很大, 培养学生代数推理能力起到承前启后的作用, 既能做好小初衔接, 又能为初中数学继续学习打下良好的基础, 因此在教学过程中有必要呈现完整的推理过程. 完整的推理过程有助于学生更好的体会代数推理中所用到的知识方法, 有助于使解题思路更加清楚, 不仅使学生知其然而且知其所以然.

其所以然.

例 4 已知 $a - b < 0, abc > 0, c < 0$, 化简 $|a - b| - |b - c| + |a + c|$.

解

因为 $abc > 0, c < 0$, 所以 $ab < 0$, 因为 $a - b < 0$, 所以 $b > 0, a < 0$, 所以 $a - b < 0, b - c > 0, a + c < 0$,

$$\begin{aligned} & |a - b| - |b - c| + |a + c| \\ &= b - a - (b - c) - (a + c) \\ &= -2a. \end{aligned}$$

分析 本题是 7 年级学生学习过有理数综合性题目, 既用到有理数乘法法则的知识, 又用到绝对值知识, 在讲解过程中注重知识运用的连贯性, 说清每一步骤的来龙去脉, 使推理过程更加清晰和可视化的展现在学生面前, 使学生更好的理解推理方法和推理过程.

五、结语

代数推理能力的培养应贯穿在整个数学学习过程中. 代数推理不仅包括合情推理而且也有演绎推理, 演绎推理必须通过严格的逻辑证明来加以证实, 如果说合情推理属于灵感的火花, 演绎推理无疑是证明真理最可靠的方法. 代数推理在教学中理应受到重视, 以此提高学生的推理能力, 提高学生发现数学美、理解数学美、欣赏数学美的能力, 推动学生数学核心素养的发展.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [2] 董连春, 吴立宝, 王立东. PISA2021 数学素养测评框架评介[J]. 数学教育学报, 2019, 28(4): 6-11.
- [3] 曾小平, 曹一鸣. TIMSS2019 数学评价的框架、结果与启示[J]. 课程·教材·教法, 2022, 42(1): 147-153.
- [4] 颜飞, 吕世虎. 《义务教育数学课程标准(2022年版)》中课程内容的新变化[J]. 天津师范大学学报(基础教育版), 2022, 23(4): 19-24.
- [5] 唐彩斌, 史宁中. 素养立意的数学课程——《义务教育数学课程标准(2022年版)》解读[J]. 全球教育展望, 2022, 51(6): 24-33.
- [6] 濮安山, 刘兰茵. 数学推理研究三十年载文分析——以《数学教育学报》《数学通报》载文为例[J]. 数学教育学报, 2022, 31(4): 91-97.
- [7] 张侨平, 邢佳立, 金轩竹. 小学数学教学中数学推理的理论和实践[J]. 数学教育学报, 2021, 30(5): 1-7.
- [8] G. 波利亚. 《数学与猜想(第二卷)——合情推理模式》[M]. 李志尧, 王日爽, 李心灿译. 北京: 科学出版社, 2006.
- [9] 董建功. 数学命题设计[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2021.

【作者简介】 陈书才, 安徽师范大学附属萃文中学(241002); 董建功, 安徽师范大学数学与统计学院(241000).

【原文出处】《中学数学教学》(合肥), 2022. 6.

https://www.rdybk.com/