

【教学设计】

基于课程思政的高中数学教学探索与实践

——以“基本不等式”为例

张俊忠 李艳琴 姚 曼

【摘要】课程思政是一种课程观和教育理念,要围绕教学目标和教学内容,广泛开发蕴藏的思政元素,实现知识传授、能力培养、价值引领的和谐统一.文章介绍课程思政的内涵和原则,并以“基本不等式”为例展示基于课程思政的教学设计.

【关键词】课程思政;高中数学;教学探索;基本不等式

2012年党的十八大首次提出“把立德树人作为教育的根本任务”,2016年习总书记在全国高校思政会议上提出:“各门课都要守好一段渠、种好责任田,使各类课程与思政课同向同行,形成协同效应.”2017年,教育部提出要以课程思政推动教育教学改革,2022年,党的二十大再次提出“全面贯彻党的教育方针,落实立德树人的根本任务”.《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》指出:以社会主义核心价值观统领课程改革,着力提升课程思想性、科学性、时代性、系统性、指导性.

一、课程思政的原则

(一)坚持落实党的教育方针

落实党的教育方针是开展课程思政的首要原则.习总书记在全国教育大会上指出:“培养什么人,是教育的首要问题.”培养社会主义建设者和接班人,是中国特色社会主义教育的一贯目的,在新时代,德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人还应该成为担当中华民族伟大复兴大任的时代新人.

(二)因势利导,发挥具体课程的思政教育功能

思政课在思政教育中起核心作用,课程思政不是直接把思政课的内容搬到其他课程的教学中,而是“因势利导、顺势而为”地自然渗透,在课程里融入“思政内容”,学生不感觉唐突;课程体现了“思政味”,学生却无被“说教感”,因情感共鸣,学生顺其自然地接受,起到潜移默化的效果.

(三)与时俱进,体现时代性

实施课程思政,要求教师进行深入调查研究,及时掌握学生的思想动态,根据学生所思所想、国内国际发展形势、社会的热点问题和未来发展趋势等引入思政教育内容.仔细推敲,精心打磨,固定资源与即兴素材结合、身边故事与天边案例并举、时效性与趣味性并重,文字、图片、视频和讲授等多种方式融入.实现课程与思政巧妙整合,无缝衔接,既丰富了

课程教学内容,又活跃了课堂气氛,激发学生的学习兴趣.

二、课程思政在高中数学教学中的实践

笔者以“基本不等式”为例,展示基于课程思政的教学设计.

(一)创设情境,引入新知

如图1是在北京召开的第24届国际数学家大会的会标,会标是根据中国古代数学家赵爽(约182—250年)在注解《周髀算经》时利用的弦图设计的,颜色的明暗使它看上去像一个风筝,代表中国人民热情好客.

如果将图1中的“风车”抽象成图2,则在正方形 $ABCD$ 中有4个全等的直角三角形同,设直角三角形的两条直角边的长为 $a, b (a > b)$,赵爽利用面积的相等关系即 $AB^2 = (a - b)^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab$,证明了勾股定理,得到 $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$,那么图形中有哪些面积的不等关系?

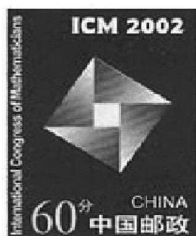


图1

不等关系有:

$$(1) (\sqrt{a^2 + b^2})^2 > (a - b)^2, \text{ 即 } 2ab > 0;$$

$$(2) (\sqrt{a^2 + b^2})^2 > 4 \times \frac{1}{2}ab, \text{ 即 } a^2 + b^2 > 2ab.$$

介绍国际数学家大会,国际数学家大会是由国际数学联盟主办的国际数学界最重要也是规模最大

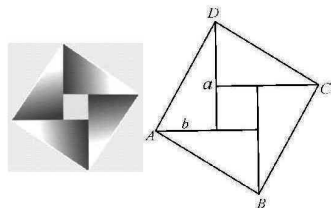


图2

的会议,每四年举行一次,被誉为国际数学界的奥林匹克盛会,首届大会1897年在瑞士苏黎世举行,2002年8月20号,第24届国际数学家大会在北京人民大会堂正式开幕。举办这次大会,是中国在国际数学界和科学界地位的体现。

(二)拓展认知,建构新知

不等关系(1)显然成立,现在主要研究不等关系(2),当三角形是等腰直角三角形时, $a=b$,里面的小正方形缩为一个点,有 $a^2+b^2=2ab$,根据弦图综合得到:当 $a>0, b>0$ 时, $a^2+b^2\geq 2ab$ 当且仅当 $a=b$ 时等号成立。

思考:当 a, b 是任意实数时, $a^2+b^2\geq 2ab$ 成立吗?

因为 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0$,所以 $a^2+b^2\geq 2ab$ 。

因此,当 a, b 是任意实数时, $a^2+b^2\geq 2ab$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立。此不等式称为重要不等式。

如果 $x>0, y>0$,令 $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}$,由重要不等式得到 $x+y\geq 2\sqrt{xy}$,即 $\frac{x+y}{2}\geq \sqrt{xy}$,于是有:当 $x>0, y>0$ 时, $\frac{x+y}{2}\geq \sqrt{xy}$,当且仅当 $x=y$ 时等号成立。此不等式称为基本不等式。

设计意图 由弦图得到:当 $a>0, b>0$ 时, $a^2+b^2\geq 2ab$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立,从特殊猜想一般,验证推理得到一般结论(重要不等式),再应用一般结论得到特殊性质(基本不等式),该过程体现了唯物辩证法中特殊与一般的思想,在认知活动中,运用特殊探索一般,通过一般指导特殊。特殊与一般是相辅相成的,也是对立统一的。

(三)发散思维,深度感悟

1. 适当变形得到基本不等式的不同变式,可以根据需要选择形式,这样能够深度掌握此结论。

(1)当 $x>0, y>0$ 时, $x+y\geq 2\sqrt{xy}$,当且仅当 $x=y$ 时等号成立。

(2)当 $x>0, y>0$ 时, $xy\leq (\frac{x+y}{2})^2$,当且仅当 $x=y$ 时等号成立。

2. 前面通过重要不等式推理论证了基本不等式,还有其他的证明方法吗?

(1)运用分析法。

要证 $\frac{x+y}{2}\geq \sqrt{xy}$,只要证 $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ ①。要证①,只要证 $x+y-2\sqrt{xy}\geq 0$ ②。要证②,只要证 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$,这显然是成立的,当且仅当 $x=y$ 时等号成立。因此, $\frac{x+y}{2}\geq \sqrt{xy}$ 。

分析法是通过执果索因证明命题,此结论也可

以运用综合法由因导果,请学生自己完成,这样能够培养学生的逻辑推理、数学运算等核心素养。

(2)运用几何方法。

由 $\sqrt{xy}$ 可以联想到平面几何中射影定理的部分结论,即直角三角形斜边上的高是高分斜边两段的比例中项。于是可以这样构造:如图3,在直线 l 上截取 $AD=x, DB=y$,以 AB 为直径作圆 O ,过点 D 作直线 l 的垂线,交圆 O 于一点 C ,连接 CA, CB, CO ,则 $CD=\sqrt{xy}, CO=\frac{x+y}{2}$,显然,当 $x\neq y$ 时, $CO>CD$;当 $x=y$ 时, $CO=CD$ 。于是证明了基本不等式。

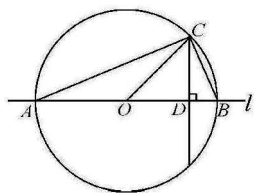


图3

设计意图 此证法给出了基本不等式的几何解释,即直角三角形中斜边上的高不超过斜边上的中线。通过数形结合,对基本不等式有了更形象的认识,有利于培养学生的直观想象核心素养。数学家华罗庚曾经这样描述数形结合的关系:“数无形时少直觉,形少数时难入微。数形结合百般好,隔离分家万事休。”借助综合法和分析法,从形到数,再从数到形,发展学生的辩证思维。

3. 定义:我们通常把 $\frac{x+y}{2}$ 叫做正数 x, y 的算术平均数,把 $\sqrt{xy}$ 叫做正数 x, y 的几何平均数。

基本不等式可以叙述为:任意两个正数的几何平均数不超过算术平均数。

基本不等式可以叙述为:任意两个正数的几何平均数不超过算术平均数。请同学们课后查一查文献资料,此定义是否可以一般化?即是否有是 n (n 是大于2的整数)个正数的算术平均数和几何平均数的说法?如果有,大小关系如何?又如何证明?通过猜测推广结论,主要是推动学生积极探索,培养抽象概括和研究的习惯。

(四)学以致用,巩固认知

例1 已知 $x>0, y>0$,求证:

$$(1) \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}; (2) \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

证明 (1)要证 $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$,只需证 $\frac{x^2+y^2}{2} \geq (\frac{x+y}{2})^2$,即证 $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$,只需证 $(x-y)^2 \geq 0$,显然成立,因此 $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$,当且仅当 $x=y$ 时等号成立。

<https://www.rdfyb.com/>

(2) 要证 $\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, 只需证 $\sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$, 即

证 $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, 只需证 $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, 显然成立, 因此 $\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, 当且仅当 $x=y$ 时等号成立.

综合观察(1)和(2), 可得性质: 当 $x>0, y>0$ 时, $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$. 此不等式叫均

值不等式, 其中 $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}, \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ 分别叫做正数 x, y 的平方平均数和调和平均数.

例2 已知 $0 < x < \frac{1}{2}$, 求 $y = x(1-2x)$ 的最大值.

解 因为 $0 < x < \frac{1}{2}$, 所以 $2x > 0, 1-2x > 0$, 从而可得

$$y = x(1-2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (1-2x) \\ \leq \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2x + (1-2x)}{2} \right]^2 = \frac{1}{8},$$

当 $2x = 1-2x$ 即 $x = \frac{1}{4}$ 时等号成立.

因此, 当 $x = \frac{1}{4}$ 时, y 取得最大值 $\frac{1}{8}$.

上述解法利用了基本不等式的变式(2), 由(2)可知: 当正数 x, y 的和为定值且满足等号成立的条件时, xy 有最大值. 同样, 由基本不等式的变式(1)可知: 当正数 x, y 的积为定值且满足等号成立的条件时, $x+y$ 有最小值. 运用基本不等式求最值, 关键是要满足三个条件, 即一正、二定、三相等, 有时要凑“定值”, 充分应用转化的数学思想方法.

例3 中秋节当天, 阿坤到商店买6斤月饼, 商店的电子秤出了故障, 不能使用, 但是商店有一个不等臂的天平, 左臂长 m 厘米, 右臂长 n 厘米 ($m \neq n$). 售货员第一次将月饼放在天平的左侧, 称出3斤; 第二次将月饼放在天平的右侧, 再称出3斤. 她将两次称出的月饼放在一起当作6斤出售, 请问实际售出的月饼是6斤吗?

解 设第一次放在左侧的月饼实际是 x 斤, 第二次放在右侧的月饼实际是 y 斤, 由物理学知识得到: $xm = 3n, yn = 3m$. 则可得: $xymn = 9mn, 3xm^2 = 3yn^2$.

因为 $m>0, n>0, m \neq n$, 所以 $xy = 9, x \neq y$.

又 $x>0, y>0$, 所以 $x+y \geq 2\sqrt{xy} = 6$, 因为 $x \neq y$, 所以 $x+y > 6$.

因此, 实际售出的月饼不是6斤, 而是超过6斤.

设计意图 此题是一个实际问题, 需要综合分析才能解决, 有利于培养学生的数学建模核心素养. 通过设未知数, 发现两次实际称出糖果的斤数之积是一个常数, 于是利用基本不等式的变式(1), 得到两次斤数之和的取值范围. 由于天平的左、右臂不等长, 则等号不成立, 再得到两次斤数之和的准确取值范围. 例题融入中华民族的传统佳节中秋节, 展示了人民的幸福生活, 我们要坚定“四个自信”, 为中华民族的伟大复兴努力奋斗.

(五) 精准小结, 升华思想

1. 基本不等式有不同的变式, 有多元的证法. 积极发散思维, 培养思维的创新性.

2. 运用基本不等式求最值, 要一正、二定、三相等. 如果形式不满足, 要会变通.

3. 算术平均数、几何平均数, 可以推广, 也可以延伸. 自主研究, 培养科学精神.

4. 从形到数、从数到形, 执果索因、由因导果, 灵活运用正向思维和逆向思维, 发展辩证思维.

5. 用特殊探索一般, 通过一般指导特殊, 巩固辩证唯物思想.

三、结束语

基于课程思政的高中数学教学设计, 要以学生为主体、教师为主导, 围绕教学目标和教学内容, 广泛开发蕴藏的思政元素. 融入数学史, 培养学生的家国情怀和民族自豪感; 概括隐含的哲学思想, 巩固辩证唯物思想; 借鉴高中数学的广泛应用, 坚定“四个自信”; 促进自主探索, 养成创新意识和科学精神; 汲取高中数学学科特点, 形成学生严谨务实的品质. 润物细无声, 实现知识教育和思政教育的和谐统一, 全面贯彻立德树人的教育根本任务.

【作者简介】 张俊忠、李艳琴, 贵州师范学院数学与大数据学院(550018); 姚曼, 华中师范大学第一附属中学初中部(430079).

【原文出处】 摘自《数学通讯》(武汉), 2023.4上. 14~17

【基金项目】 2021年贵州省普通本科高校课程思政示范课程《高等代数》; 2021年贵州省普通本科高校课程思政示范课程《中小学数学课程标准解读与教材分析》.