

【专题：推理意识培养】

编者按：《义务教育数学课程标准（2022 年版）》将推理意识确定为小学阶段学生必备的核心素养之一，这对广大一线教师如何培养学生的推理意识提出了新的要求。本期专题精选四篇文章，结合相关案例，探讨培养学生数学推理意识的实践策略，以飨读者。

基于领域划分的小学数学推理意识发展

殷如意 张明华 凌 静

【摘 要】推理是数学逻辑思维的基本形式，是小学数学核心素养要素之一。基于小学数学领域特点，分别从四个领域内容出发，探讨代数推理、空间推理、数据推理、综合推理的内涵，分析其在小学数学教材中的存在，思考在数与运算中融合代数推理、在图形认识与运动中生成空间推理、在数据整理分析中体验数据推理、在综合实践中运用综合推理的具体措施。

【关键词】数学推理；代数推理；空间推理；数据推理；综合推理

推理是数学的特性，既是学习方式也是发展目标。纵向而言，从 1950 年第一份小学算术课程暂行标准^[1]，到《义务教育数学课程标准（2011 年版）》（以下简称《课标 2011》），再到《义务教育数学课程标准（2022 年版）》（以下简称《课标 2022》），都强调要促进学生推理意识与推理能力的发展，《课标 2011》明确指出要将推理能力的发展贯穿在整个数学学习过程中^[2]，《课标 2022》强调了推理意识与推理能力的整体性、阶段性关系^[3]。横向而言，世界多国数学课程标准都强调了对学生推理能力发展的要求，如《澳大利亚课程标准：数学（8.4）》^[4]将数学课程旨在向学生逐渐渗透数学推理的美作为其重要的课程理念。PISA2021^[5]中推理是学生数学素养的构成要素。推理同样是我国学生数学核心素养发展表现之一。

推理作为数学逻辑思维的基本形式，是从一个或几个已有命题得出另一个新命题的过程，具体而言是个体对数学对象（如概念、性质、命题、规则等）进行逻辑思考（观察、比较、归纳、类比等），从而推理得出结论，并通过举证、反例等对所得结论合理性进行论证的综合能力^[6]。一般分为合情推理、演绎推理，其中合情推理是小学数学学习的核心推理方式，是个体基于现有条件、经验、事实，通过直觉、观察、比较等活动，采用归纳和类比等方式推断某些结果，

并对结论进行验证的一种思维过程；演绎推理则是从一般事实出发（法则、性质、定理等）进行个别论证的过程。《课标 2011》总目标中提出，学生要在观察、猜想、证明等数学活动中，发展合情推理和演绎推理能力，第一学段目标强调能对调查过程中获得的简单数据进行归类，第二学段目标注重在观察、实验、猜想、验证等活动中，发展合情推理能力。《课标 2022》将推理意识作为小学阶段数学核心素养固定下来，强调学生对逻辑推理过程及其意义的初步感悟^[7]。推理本身有利于学生观察能力、比较能力、归纳能力、猜想能力的发展，丰富学生的数学趣味性、逻辑性过程体验。

一、领域划分下的数学推理

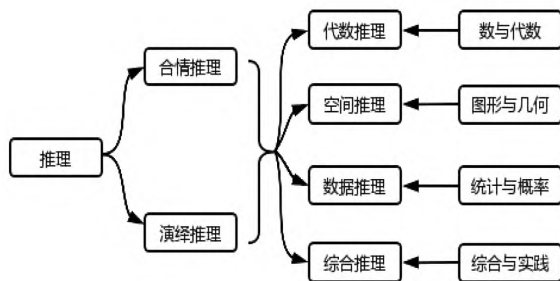


图1 数学推理的分类

小学数学教材、教学中的推理不同于数学知识点的显性存在，而是一种潜在性特点更突出的数学



特性,在“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四大领域以不同的形式存在,有着不同的发展要求.因此,基于小学数学不同领域的内容特点,在推理的基本内涵下,尝试结合领域特点探讨代数推理、空间推理、数据推理、综合推理的内涵及发展策略.

表1 小学阶段推理发展的内容及存在形式

推理类型	具体内容	存在形式
代数推理	1. 数与运算:整数、小数、分数的认识,包括基数、序数特点的理解、读写、大小比较;整数、小数、分数的四则运算,包括算法、算理、运算律 2. 数量关系:用字母表示数、正反比例	1. 对数系发展规律的总结,推理创造数;总结数的读写特点,迁移认识大数等不同类型的数;通过举例、比较、猜想、总结运算规律,推理概括算法、运算律 2. 从有规律的式的表达中理解用字母表示数;通过系列关系式理解正反比例
空间推理	1. 图形的认识与测量:长方体、正方体、圆柱、长方形、正方形、三角形、圆、线段、直线、射线等的直观辨认与特征认识;周长、面积、体积计算 2. 图形的位置与运动:方位、用数对确定位置;平移、旋转、轴对称	1. 在观察、操作、比较中概括、归纳图形特征;在观察比较、操作转化、举例验证等数学活动中猜想、推理、证明图形的面积、体积计算公式 2. 在观察比较中归纳概括图形运动、位置表示特征,并演绎运用
数据推理	1. 数据分类:分类整理 2. 数据的收集、整理与表达:统计表与统计图包括单式、复式统计表;单式、复式条形统计图;折线统计图与扇形统计图;平均数 3. 随机现象发生的可能性	1. 依据数据特点推断分类标准 2. 依据数据分析描述进行趋势预测、总体推断等 3. 对事件发生的可能性及大小做出推断
综合推理	各领域知识的综合运用与实际应用	利用生活中的现象、事件,发现其中规律,做出推理

(一)代数推理

“数与代数”领域的推理通常与数和运算相关,包括对数字与计算进行总结,将所得结论用有意义的符号进行表达并加以探索验证.小学数学中的代数推理具体可表现为对数的属性、符号意义、运算规

律等的发现与概括,如奇数、偶数的特点,运算律的归纳,乘法口诀的编制等.代数推理能够促进学生对数的不同属性的感知、理解运算的道理,发展数感、符号意识、运算能力等.寻找(looking for)、识别(recognizing)、概括(generalizing)与运用(using)潜在的数学结构(mathematical structures)是代数推理的活动要素^[8].这利于改变记忆、模仿等机械的学习方式,启发学生在观察、比较、归纳中发现规律,归纳数学知识.

如“商不变的性质”,结合“6个桃分给3只小猴,60个桃分给30只小猴,600只桃分给300只小猴”的故事情境,引导学生列出: $6 \div 3 = 2$, $60 \div 30 = 2$, $600 \div 300 = 2$ 系列算式,通过观察、比较逐步发现规律,三组算式被除数、除数都不同,但商相同,同组内被除数、除数相对于其他组总是同时扩大或缩小相同倍数,初步猜想被除数和除数同时乘或除以相同的数,商不变,通过举例验证,得出被除数和除数同时乘或除以相同的数(0除外),商不变.

“探索规律”是“数与代数”领域的个性化模块,是促进学生推理意识发展的重要载体,如“有趣的乘法计算”(如图2).

24

×

11

53

×

11

62

×

11

图2 有趣的乘法计算

学生通过观察比较,发现算式本身的特点“都是两位数乘11”,之后引导学生比较乘积与乘数,初步发现乘积的规律“积的个位与第一个乘数的个位相同,积的百位与第一个乘数的十位相同,积的十位等于第一个乘数个位与十位上数相加之和”.由此鼓励学生猜想两位数乘11的计算结果是否都具有这样的规律,并举例进行计算验证,注意乘数个位与十位上数相加之和大于等于10的情况,从而得到结论“两头一拉,中间相加,满十进一.”

(二)空间推理

空间观念发展是“图形与几何”领域的素养要求,强调实物与图形之间的转换、图形位置关系的变换等.而空间推理指个体由空间对象或表征建造心像并进行操作,以进行空间表征间变换的认知历程,因此空间推理是建立空间表象、发展空间观念、增进空间想象的思维依托.小学数学教学中的空间推理可表现为个体对空间对象的表征、平移、旋转、分类、

转换和想象等操作及心理活动。

张侨平教授认为在小学阶段,“三视图”问题是培养学生空间推理能力的要点。在处理三视图问题时需要学生空间定位(spatial orientation)、三视图的解码(decoding)、空间组织(spatial organization)等不同方面的能力^[9]。如在“观察物体”(如图3)的学习中,要求学生能够根据三视图想象出实际图形,即对学生三视图解码能力的要求,通过三视图对立体图形的形状进行推理。学生通过想象自己不同的观察角度,逐步推理、缩小、确定图形,首先从视角1猜想、推理图形的可能样式,再基于视角1,从视角2进一步猜想、推理、缩小图形的类型,之后基于视角1、视角2,从视角3推理、确定最终图形。

先想一想,再用4个同样大的正方体摆一摆。

(1) 从前面看到的是 , 从右面看到的是 .

(2) 从上面看到的是 .

你能想出不同的摆法吗?



图3 观察物体

“图形与几何”领域的空间推理,既表现为内容、结果的推理,也可表现为方法推理,如基于长方形面积探究长方体体积。一方面可通过对长方形、长方体关系及相似性的比较,大胆推测因为 $s = ab$, 所以 $v = abh$, 对长方体体积做出结果性类比推理;另一方面,同样基于长方形、长方体相似性的比较,通过摆小正方形探索长方形面积的思路,推测用摆小正方形探索长方体体积,对长方体体积做出探究方法的类比推理(如图4)。类似的推理还存在于长方形面积到平行四边形面积,平行四边形面积到三角形面积,再到梯形面积的方法推理。

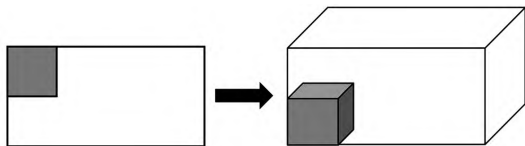


图4 基于长方形面积探究长方体体积

(三) 数据推理

数据意识发展是“统计与概率”领域的素养表现,包括理解收集数据的必要性,通过分析做出判断,体会数据中蕴涵着的信息,了解数据分析方法多样化,感受数据随机性等。通过统计数据,利用数据分析问题,做出大胆预测,进行推理是统计教学的重

要意义。在小学数学教学中数据推理可表现为基于数据的收集、分析,总结数据规律,做出推断与预测,并应用于生产生活。

数据时代,数据的收集与整理是进行问题分析、趋势推断、措施抉择的基本依据,数据意识强调学生对数据的敏感性,能够从数据中获取信息、应用数据,并依据数据做出推断。折线统计图的特点之一是能够较好地通过数据反映变化趋势,因此也是促进学生推理意识发展的直接载体。不同版本小学数学教材中都结合具体情境,利用折线统计图发展学生推理意识与推理能力,如苏教版数学教材基于张小楠6~12岁的身高变化可对其13岁的身高做出推断(如图5)。

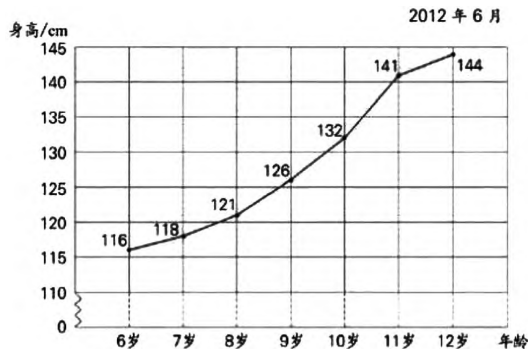


图5 张小楠6~12岁身高情况统计图

“概率”内容常用于推断,有利于学生推理意识的建立及推理运用,概率分析方法一般分为两种:一种是依据所有可能的结果去判断某种结果出现的可能性;一种是通过重复试验,由事件的频率估计概率^[10]。如图6,一种方法可以列举出有6种结果,其中蓝色5种,绿色1种,所以停在蓝色上的可能性大;另一种方法可以组织各个小组进行20次的转动活动,结果停在蓝色中的次数更多,也有可能一样多(较少),或停在绿色区域次数多(偶发)。由此启发学生对下一次所停区域进行预测,引导学生学会依据结果进行合理预测,发展合情推理意识。

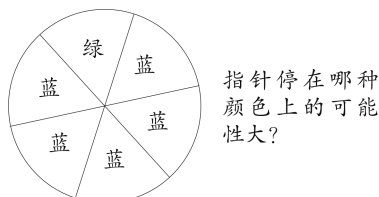


图6 “概率”练习题

(四) 综合推理

综合推理也可称为生活推理或实践推理,“综合

与实践”领域是对其他三个领域所学知识技能以及个体经验积累的综合运用,其目的在于促进学生应用意识及能力的发展.因此,小学数学中的综合推理可理解为数学推理各种形式的综合运用,以及数学推理在实际生活中的实践应用.

如苏教版《数学》四年级下册中“综合与实践”领域的“数字与信息”,可利用家庭成员、同一地区成员身份证信息的异同点,引导学生推理发现身份证前6位数字、7-14位数字编码的规律,理解地址码和出生日期码,利用男、女同学身份证信息推理身份证第17位数的编码规律——男性为奇数,女性为偶数等.

比较分析

了解自己及家庭成员的出生日期和身份证号码,与同学交流。



讨论:

1. 不同人的身份证号码会相同吗?你能从身份证号码中看出一个人的出生日期吗?
2. 不同的身份证号码中有相同的部分吗?你知道这一部分所包含的信息吗?
3. 你还能发现哪些信息?

图7 “数字与信息”教材图

推理是日常生活的一部分,推理可以培养学生将事件由局部放大到整体的意识与能力,如警察在办理案件时,通过时间、地点等信息的叠加,对案件做出推理判断;依据不同生物的特性类比推理,创造出可供人类使用的飞机、潜水艇等;依据所观测到的数据对天气变化做出预测,尤其是在夏季对降水情况做出预测,做好防御措施等.

二、基于领域特点发展数学推理

(一)在数与运算中融合代数推理

《课标2022》将“数与代数”领域划分为“数与运算”“数量关系”两个主题.“数与运算”指整数、小数和分数的认识及其四则运算,学生需要理解掌握数的概念,理解算理、掌握算法,数本身存在有序性、规律性,教师应引导学生探索发现数的规律,发展推理意识,算法总结应建立在学生对运算规律归纳概括的基础上,促进学生合情推理意识与能力发展.“数量关系”是指用“数”与“符号”表达“运算”及解决问题的过程,离不开“数与运算”,因此“数与代数”领

域有丰富的推理素材,教师可在不同内容中渗透推理环节,促进学生推理意识的形成.

(1)创造数,归纳规律.如在“2和5的倍数”学习中,首先基于学生对倍数的学习,组织学生自主、有序地分别写出一些2和5的倍数(通常学生会通过分别与1、2、3……各数相乘的方法有序寻找),再引导学生观察所列出的2和5的倍数特征,发现2的倍数末尾总是2、4、6、8、0,而5的倍数末尾总是5、0,由此初步归纳推理得到2和5的倍数特征(如图8).基于此,鼓励学生利用现有发现直接写出一些2和5的倍数,再通过计算的方式验证.如此学生通过观察、比较、猜想、验证的数学活动归纳推理出2和5的倍数特征,并能够运用规律更加便捷地列举2和5的倍数.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

图8 寻找2和5的倍数

(2)概括算法,演绎运用.如“小数乘法”的学习,在引导学生理解算理的基础上,启发学生对多个算式中乘数中的小数位数与乘积中的小数位数进行比较,发现“乘数中总共有几位小数,乘积中就有几位小数”,并对小数乘法的算法提出猜想“小数乘法中乘数中有几位小数,就从积的末尾数出几位,点上小数点(注意末尾有0的情况)”,由此通过猜想举例,计算验证猜想,归纳出算法.

同样,可以引导学生归纳出不同的运算律,如“乘法分配律”的学习,引导学生结合情境列出 $(6+4) \times 24$ 或 $6 \times 24 + 4 \times 24$,比较两个算式的关系、异同后,可得到: $(6+4) \times 24 = 6 \times 24 + 4 \times 24$.并做出解释:等号两边的数字相同,运算顺序不同,计算结果相同;等号左边先算了6与4的和,再与24相乘,等号右边将6、4分别与24相乘再相加.在初步发现规律的基础上,学生再列举一些同类型的例子,比较归纳得到:两个数的和与一个数相乘,可以把这两个数分别与这个数相乘,再相加,即 $(a+b)c = ac + bc$.且可引导学生比较发现在此算式中先算 $(6+4)$ 更简单,由此启发学生将乘法分配律演绎运用到日常计算中,简化计算过程.

(二)在图形认识、测量、运动中生成空间推理

《课标2022》中“图形的认识与测量”和“图形的

位置与运动”是“图形与几何”领域的两个主题。“认识与测量”中对于图形特点的概括,以及面积、体积计算公式的推导过程,都是学生推理意识发展的重要素材,对于图形由直观辨认识到系统认识都需经历观察比较、归纳总结、概括特点的认识过程,对于多边形面积的探索同样需要在观察比较、举例验证、归纳概括的推理过程中生成面积计算公式,且平面图形和立体图形之间的相似性是发展类比推理的重要凭借。

(1)猜想归纳,推导公式。图形面积计算公式的推导是发展学生空间推理意识较为显性的素材,以“三角形面积”为例,可引导学生对方格纸中平行四边形沿对角线分成的两个三角形的面积大小进行观察、比较、猜想,初步得到“平行四边形可分成2个完全一样的三角形”“两个完全一样的三角形可以拼成一个平行四边形”“所分成的三角形的面积是平行四边形的一半”“三角形面积等于底乘高除以二”等结论与猜想,并鼓励学生用几组两两相同的三角形进行拼搭,整理三角形的底、高、面积与所拼成的平行四边形的底、高、面积的关系,在比较归纳中得到结论。此过程能让学生充分经历观察、比较、猜想、举例、归纳、验证等推理过程,能够促进学生建立推理意识、发展推理能力,更能够启发学生对图形间关系的思考,发展空间推理。在整个图形面积学习中都应引导学生经历面积公式产生的推导过程,准确把握几种图形之间的关系,能够意识到长方形面积公式的基础性、关键性,系统地促进学生空间推理发展。

(2)观察比较,想象生成。如上文“三视图”是促进学生空间观念及空间推理发展的关键,小学阶段学生对于拼搭图形三视图的判断是促进学生空间想象和空间推理发展的基本素材,要想使学生正确想象或推断从前面、上面、左面观察到的图形,在教学时应给予学生从不同角度观察物体的机会,丰富学生观察物体的经验以及表象,储备想象和推理的参照物,能够在想象自己位置改变的同时,保持空间物体内部各部分的相对位置不变,逆向而言,能够通过三视图对立体物体的形状进行推理。

(三)在数据整理、分析中体验数据推理

信息时代,“统计与概率”领域的内容设置体现了社会对个体发展的要求,在小学数学中主要包括数据分类、收集、整理与表达,以及随机现象发生等内容。但统计类的教学不能只注重显性的、直观的数据

解读,而要基于数据的调查、整理,进行潜在信息的分析、推理、预见,这才是统计教学的本质,因此在实际教学中要引导学生在无序的数据中发现有序的规律,通过样本对总体做出推断,基于现有数据进行预测等数据描述与数据推断活动。

(1)分析数据,推断选择。对数据的收集与分析的重要意义之一是为后续的决策提供判断依据,在“折线统计图”教学中,单式折线统计图可以反映某个事件在某段时间内的变化趋势,并依据数据分析对其走势做出判断。而复式折线统计图则能够反映两种或两种以上事件的信息,并能够依据数据的比较分析做出推断。如通过折线统计图呈现一位选手近5场投篮比赛的得分情况,引导学生对其下一场比赛的得分情况做出推断,并通过数据分析说明推断依据;再如在复式折线统计图中,呈现两位选手近5场投篮比赛的得分情况,引导学生对下一场比赛谁赢的可能性大做出推断,并说明推断依据。

(2)体验可能,推测概率。随机现象在生产生活中普遍存在,而概率也常被用于商家活动,如“抽奖”,教师可在“可能性”的学习中设置模拟抽奖活动,引导学生对获奖的可能性做出推断,理解生活中买彩票中奖的随机性和中大奖的低概率性。如设置一个被等分成12份的圆形转盘,设置1份一等奖、2份二等奖、3份三等奖、6份无奖,学生分小组进行模拟抽奖活动,记录每次中奖情况,经过多次操作后可发现,中奖或不中奖存在一定的随机性,但中奖可能性约在 $\frac{1}{2}$ 左右,而中一等奖的可能性非常低。在此基础上,进一步引导学生思考若等分成36份,同样设置1份一等奖、2份二等奖、3份三等奖,其余无奖,中奖的可能性会发生怎样的变化,并操作验证。由此引导学生理解可能性及其大小,同时启发学生正确认识买彩票等抽奖活动。

(四)在综合与实践运用综合推理

“综合与实践”领域的内容以现实问题和跨学科实践为主,在小学阶段主要采用主题活动方式,既是对数学领域内所学知识的融合运用,也是数学与其他学科、生活实际相结合的综合运用。因此,教学中既要利用教材内容引导学生进行推理,更要充分地结合现实生活、学生经验,发现生活中的规律,运用数学推理于生活,用数学服务生活。

如苏教版教材中的“数字与信息”、北师大版教材中的“编码”都是利用身份证信息引导学生理解编码,发展推理意识。以“编码”一课为例,通过帮助探长破案的推理情境,引导学生对嫌疑人身份信息进行分析,在理解身份证、银行卡编码规律的同时,推理破案(如图9)。基于本节课的学习,教师可引导学生思考自己的学号是否存在编码规律,并鼓励学生通过收集不同年级、班级、学生的学号进行比较,推测其中的编码规律。在发现学号编码规律的基础上,

启发学生思考是否还有其他的学号编码方式,能够反映年级、班级、顺序、男女等信息,提升学生的编码能力和推理应用意识。

推理意识有助于养成条理清晰的思维习惯,提升交流的逻辑性,是推理能力发展不可或缺的思维经验,能够为形成严谨的科学研究态度和实事求是的工作作风奠定基础。因此,小学阶段推理意识的养成除了专题教学,更应该在四大领域中潜移默化地分散渗透,形成习惯。



图9 “编码”练习题

参考文献:

- [1] 课程教材研究所. 20 世纪中国中小学课程标准教学大纲汇编(数学卷)[M]. 北京:人民教育出版社,2001:49.
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[S]. 北京:北京师范大学出版社,2012:5.
- [3][7] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京:北京师范大学出版社,2022:9.
- [4] 李保臻,王亚妮,米鹏莉. 中澳义务教育数学课程标准的比较研究[J]. 内蒙古师范大学学报:教育科学版,2021,34(2):99-107.
- [5] OECD. PISA 2021 mathematics framework[M]. France:OECD Publishing,2018:8.
- [6] 徐斌艳. 数学学科核心能力研究[M]. 上海:华东师范大学出版社,2019:68.
- [8] 张侨平,邢佳立,金轩竹. 小学数学教学中数学推理的理论和实践[J]. 数学教育学报,2021,30(5):1-7.
- [9] 陈韵如,杨凯琳,林福来. 小学高年级学生在立方体积木三视图的推理表现[J]. 台湾数学教育期刊,2018(1):34.
- [10] 朱荣武. 在数据分析中培育学生统计推理能力[J]. 教学与管理(小学版),2020(6):35-37.

【作者简介】殷如意,宿迁学院文理学院;张明华,江苏省宿迁市实验小学;凌静,江苏省宿迁市庐山路小学。

【原文出处】《教学与管理》:小学版(太原),2023.2.29~34

【基金项目】该文为 2022 年江苏高校哲学社会科学研究项目“‘双减’政策下义务教育阶段教学质量提升路径研究”(2022SJYB2422)的研究成果。