

数学推理的 理念演变、教学共识及策略改进

王兆正

【摘要】推理支撑着所有的数学思维活动,是数学核心素养的重要组成成分。文章基于对数学推理的理念演变分析,强调教师需达成更多对数学推理的共识,并提出关注推理本质,提高教学设计的合理性;关注推理价值,强化教学活动的启发性;关注儿童特征,注重教学过程的适切性等改进策略。

【关键词】数学推理;理念演变;教学共识;策略改进

推理支撑着所有的数学思维活动,是数学核心素养的重要组成成分。因此,数学推理教学需要得到足够的重视。但在当前的教学实践中,仍存在着定位不清、认识不全、策略不明等问题,需要进一步厘清和探究。

一、数学推理的理念演变

从1952年的《小学算术教学大纲(草案)》起,推理在我国数学教学纲领性文件中的表述虽有不同,但一直都是课程目标的重要内容。其概念名词的演变经历了“逻辑思维”“逻辑推理能力”“逻辑思维能力”到“推理能力”“推理意识”的过程。在历次演变过程中,尤其是2001年实施课程标准以来,有如下几个明显趋势。

首先,从表现到精神,育人价值更明确。《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》强调“能清晰、有条理地表达自己的思考过程,做到言之有理、落笔有据;在与他人交流的过程中,能运用数学语言合乎逻辑地进行讨论与质疑”。可见,此时有关推理的要求还局限在思维的具体过程中。而在《义务教育数学课程标准(2022年版)》中则将相关要求表达为“养成重论据、合乎逻辑的思维习惯,形成实事求是的科学态度和理性精神”。

其次,从单一到全面,内涵界定更清晰。《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》强调“能通过观察、实验、归纳、类比等获得数学猜想,并进一步寻求证据、给出证明或举出反例”,更多是从教学视角阐述推理内涵。《义务教育数学课程标准(2011年版)》则进一步明确推理一般包括“合情推理和演绎推理”,并阐述了两种推理类型的定义和功能定位,《义

务教育数学课程标准(2022年版)》则基于学段特征将相关要求进一步细分为“推理意识”和“推理能力”,指出小学阶段“推理意识主要是指对逻辑推理过程及其意义的初步感悟”,初中阶段“推理能力主要是指从一些事实和命题出发,依据规则推出其他命题或结论的能力”。同时,还给出了非常详细的内涵阐述,包括推理的本质、类型、过程、特征、价值等,突出了数学角度的理解。

最后,从割裂到统一,发展过程更一致。《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》和《义务教育数学课程标准(2011年版)》在学段目标的小学部分均只提出发展合情推理能力,而在初中部分则提出发展合情推理与演绎推理的能力。而在《义务教育数学课程标准(2022年版)》中,虽然依据小学和初中分别提出了“推理意识”和“推理能力”,但并没有完全割裂合情推理和演绎推理,而是强调在小学阶段进行归纳、类比时,也要“体验数学从一般到特殊的论证过程”,推理意识要成为“形成推理能力的经验基础”。

二、数学推理的教学共识

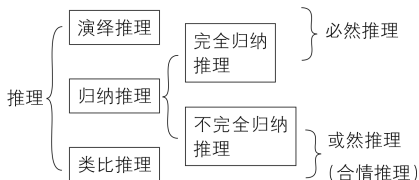
虽然课标理念不断发展,但在教学实践中落实这些理念更不容易。比如,数学推理教学中存在着形式化、表面化的现象,即看似在推理,实质上并不符合儿童的认知规律和数学推理的本质,没有发挥数学推理的真正育人价值。因此,在教学实践中,还需达成更多对数学推理的共识。

(一)重视探讨数学推理的本体性知识

数学推理教学需要教师自身懂推理、会推理。但一些教师自身本体性知识缺乏,往往对数学推理的本质表现、基本类型、功能定位以及培养过程等基本理

论缺乏正确认知,从而带来教学偏差.事实上,对数学推理本身的基本认识必将成为教师教学实践的重要基础.即如,《义务教育数学课程标准(2011年版)》提出推理一般包括合情推理和演绎推理.但因为这两种推理的分类角度不同,许多人对其内在关系和功能并不清楚.

从关系上说,曹培英认为,推理有多样性,可以根据不同的标准分类.比较常见的分类有两种,一种是根据推理的形式,分为演绎推理(由一般到特殊),归纳推理(由特殊到一般)以及类比推理(由特殊到特殊).其中归纳推理又可以根据前提所考察对象的范围,分为完全归纳推理和不完全归纳推理.另一种是根据推理的前提和结论之间是否具有必然联系,把推理分为必然推理和或然推理(也叫合情推理或似真推理).演绎推理是由一般性知识前提推出特殊性结论,因此是必然推理;完全归纳推理考察了某类事物的全部对象,无一例外,它也是必然推理.而不完全归纳推理则仅仅考察了某类事物的部分对象,由此推出的一般结论,可能真,也可能假,它是或然推理;至于类比推理,以两个或两类对象有部分属性相同为前提,推出它们的其他属性会有相同的结论,自然也是或然推理.因此,课程标准中关于推理的关系可以用下图表示:



从功能上说,当前数学教学强调让学生经历一个完整连贯的从合情推理到演绎推理的过程,实质上强调的是从或然推理到必然推理的过程,进而达成“讲道理、有条理”的思维品质.在这个过程中,或然推理的功能是帮助学生探索思路、获得初步猜想、发现可能的结论.期间,教师应鼓励学生大胆猜测.而必然推理的功能是注重运用事实和逻辑进行论证或说理,以进一步确认猜想的正确性,从而培养学生的理性精神.

(二) 正确把握儿童推理的阶段特性

儿童在小学阶段推理教学中的实际状况,主要有两个表现:一是合情推理多于必然推理.这是儿童思维特征所决定的.这一方面表现为直接性.儿童缺乏严密的演绎推理能力,常常不经过一步步仔细分析与推敲的过程,就提出假设,类似于直接猜想.另一方面表现为具象化.儿童推理时需要以具体形象

和表象作为支撑,常以比较丰富的具体实例,逐步抽象、概括得到概念、命题等.二是推理意识先于推理能力.严格的数学推理需要建立在明确数学概念内涵和外延的基础上,需要研究概念的性质,以及这个概念与其他概念之间的关系,通过推理确定条件与结论的命题的真假.而小学阶段绝大多数数学概念采用形象、直观的描述性定义,缺乏对内涵的明确定义,许多判断和命题缺乏清晰的推理起点,因此小学阶段主要应培养学生的推理意识,而非推理能力.

(三) 重视发挥数学推理的教学价值

首先,数学推理应贯穿于学生学习的全过程.《义务教育数学课程标准(2011年版)》在前言中指出,推理能力的发展应贯穿于整个数学学习过程之中.数学推理不只存在于几道推理题的教学中,而是数学学习的普遍需求和本质体现.在对数与形的概念进行抽象概括时,在规律、法则、方法的建构过程中,在探究、猜想、验证的认知过程中,都或多或少地蕴含着联想、类比、归纳、猜测、验证等推理手段.所以,数学学习离不开推理.

其次,要用数学推理推动学生深度学习的发生.推理的实质就是发现,是从已有知识推出新结论、生成新知识,特别是可以得到不可能通过感觉经验掌握的新知识.数学教学把推理过程有机融入到学习过程之中,就能使得原先通过接受、识记获得的知识结论,成为学生主动探索、发现的创新成果,实现让数学知识不断生长的同时,数学能力、活动经验、思想方法以及好奇心、求知欲等也在不断生长.

最后,要通过数学推理促使理性精神的形成.数学推理有别于其他学科的育人价值.物理、化学、生物等学科更多地用事实说话,基于实验判断对错;唯有数学,仅仅凭推理就能辨别真伪.在今后的学习或工作中,对复杂信息进行甄别、选择,推理具有极大的作用.

三、数学推理教学的策略改进

针对以上提到的理念演变和教学共识,笔者提出以下几种有关数学推理教学的改进策略.

(一) 关注推理本质,提高教学设计的合理性

首先,教学应预设推理冲突,感受推理的局限性.数学推理教学中不要总是事先指明探究方向,让推理一帆风顺.可以让学生经历“提出猜想→举例推翻猜想→改变思路→再次猜想→验证猜想”的过程,由此发现合情推理的结论可能为真,也可能为假,从而引导他们感受合情推理的局限性,并对推理的结论保持一种审慎的理性态度.例如,教学“5的倍数

的特征”时,可以基于2的倍数的特征进行类推,观察个位数的特征.但教学“3的倍数的特征”时,当学生提出个位是“0、3、6、9的数是3的倍数”这一猜想时,则可通过进一步的举例让他们发现3的倍数个位上的数可能是0~9,这也就意味着此前所作的类推是错误的.由此促使学生自觉转变观察角度,改变只看个位的思维定势,从而得到新的思考角度.

其次,要注意探寻推理的原点,促进推理的自主性.数学推理教学要能切合儿童的生活经验和认知基础,从推理的原点设计问题情境,启发学生进行自主探究.例如,教学“3的倍数的特征”时,当学生经历只看个位上的数行不通的过程之后,教师不要简单地暗示:“看来判断一个数是不是3的倍数只看个位是不行的.那么把各个数位上的数加起来,你有什么发现呢?”而应当让学生回到“举例—观察—猜想—验证”的推理原点,引导他们借助百数表再次举例,并在百数表中圈出3的倍数.在学生发现3的倍数在“百数表”中成“斜行”排列的规律之后,教师引导他们进一步观察.学生再发现“十位上的数依次加1,个位上的数依次减1”之后,教师通过追问“什么不变”,启发他们发现“十位上的数与个位上的数相加的和是不变的”.至此,学生进一步探索并发现3的倍数的特征也就水到渠成了.

最后,要重视学生的推理表达,培养思维的逻辑性.学生在运用合情推理大胆猜测结论后,要引导他们通过讨论“为什么”来进一步确认结论的正确性,以培养对猜想或发现进行反思的意识.要让学生认识到,无论经过多少次检验、有多少个实例支持结论,得到的结论仍然具有不确定性.只有真正弄清楚“为什么”,找出必然联系,才能得出必然结论.例如,教学2、5、3的倍数的特征时,除了通过具体的例子发现相关的规律,还可引导学生结合具体的例子进行必要的解释,进一步感受相关结论的正确性.即如:可以要求学生比较如下的多位数分解式,说说为什么判断一个数是不是2的倍数,只要看个位上的数就可以了.

$$\begin{aligned} 23 &= 20 + 3 & 24 &= 20 + 4 \\ 123 &= 120 + 3 & 124 &= 120 + 4 \\ 5123 &= 5120 + 3 & 5124 &= 5120 + 4 \end{aligned}$$

(二)关注推理价值,强化教学活动的启发性

首先,要引导学生经历过程.数学推理能够培养学生的探索发现能力.教师要让学生充分经历观察、猜测、验证等活动过程,把知识的接受过程变成探究过程.例如,教学“体积单位的进率”时,教材的编排

顺序通常是先教学1立方分米=1000立方厘米,1立方米=1000立方分米,然后在练习中引导学生进一步观察、对比相邻的长度单位、面积单位以及体积单位之间的进率,帮助他们形成结构化的认识.笔者在教学时调整次序,首先复习相邻的长度单位、面积单位之间的进率,然后引导学生猜想:“你觉得相邻的体积单位之间的进率是多少?”接着让学生带着猜想进行验证:“为什么进率会变成1000?”学生类比长度单位和面积单位的换算思路,通过体积单位的换算逐步发现了其中的秘密:一个体积单位,每排可以摆10个更小的体积单位,有这样的10排,像这样要摆满10层,可见长(10)×宽(10)×高(10)=1000个相邻的小单位,即相邻体积单位之间的进率是1000.

其次,要重视对相关结论的审视.具有良好推理意识的人,能够对获得的结论进行自觉的审视,即自动从推理的角度来判断结果是否合理.例如,吴正宪老师在教学“角的度量”时,要求学生测量一个45°的角.结果出现了两个不同的答案:135°和46°.如何引导学生从数学推理角度进行反思呢?吴老师给我们作出了示范.对于135°这个结果,教师追问:“这个结果可能吗?为什么?”学生很自然地进行推理:不可能,因为这个角一眼就能看出是个锐角,不可能大于90°.出现这个错误答案的原因可能是把内圈和外圈刻度混淆了.而对于46°这个结果,教师这样引导:“测量就会有误差,你觉得可能哪个环节做得不够好?”由此启发学生从不同角度进行推测,即如:观察的角度可能有点斜,量角器摆放的位置稍稍有点偏差,等等.还有的学生甚至提出,提供的角本身也可能有问题.

最后,要重视突破学生的学习难点.开展数学推理还有助于学生理解数学知识的本质.例如,对于“单位换算”这样的常见习题,教师在教学中经常强调“把大单位换算成小单位,要乘进率;把小单位换算成大单位,要除以进率”.但学生由于不明白原理,所以仍然会发生混淆.2018年江苏省小学数学学业质量检测中,有一道题:10升=()毫升.这道题的思维难度并不大,但平均得分率仅为72.2%.笔者在单位换算教学中尝试进行如下的设计:有一条线段,请你选择合适的单位测量出它的长度.方法一是选择分米作单位,结果是3分米;方法二是选择厘米作单位,结果是30厘米.两种方法同时按不同单位画图演示,分别是画成3个1分米和30个1厘米.引导学生观察,两种方法中,计量单位和计量单位的个数



各有什么变化?学生很自然就能发现:计量单位变小之后,计量单位的个数就会变多.由此,就能从度量视角更加透彻地认识到计量单位大小的变化与个数多少之间所存在的相依互变的关系.

(三)关注儿童特征,注重教学过程的适切性

首先,要引导学生在过程中积累推理经验.儿童的思维具有直觉性,常常不经过一步步的仔细分析和推理,就会直接给出自己的猜想.有的教师不关注推理过程,轻易地把学生的猜想当作结论,然后通过反复练习帮助学生巩固认识.这样做显然不利于学生对推理本质的理解.例如,教学“分数乘整数”时,要求学生计算 $\frac{3}{10} \times 3$.在引导学生得出3个 $\frac{1}{10}$ 乘3也就是9个 $\frac{1}{10}$ 后,就给出“分数乘整数,分母不变,分子相乘”这一算法.事实上,这样的归纳是不合规则的,因为我们不能基于一个实例归纳出一般意义的结论.教学时,可以要求学生继续用这样的方法计算类似的式题并进行说理,逐渐发现不同式题的算法存在相同之处.此时,要求学生说说分数乘整数应该怎样算,为什么要这样算.进而围绕计数单位的个数进行说理,帮助他们更加透彻地理解算理,培养推理意识,发展核心素养.

其次,要引导学生在推理中实现思维进阶.不同年段、不同单元甚至同一单元的先后知识点中,推理要求也不一定完全相同.教学应基于整体设计理念,形成推理要求的层级序列,帮助学生逐步发展推理意识.例如,教学苏教版教材五年级下册“因数和倍数”单元时,可以围绕探究、猜想、验证等思维活动过程,遵循“正反例说理→归纳推理、类比推理→演绎推理”的路径,划分有关推理的教学要求(见下右上表),以帮助学生实现思维进阶.

最后,要引导学生在推理过程中发展数学表达.数学学习要遵循儿童的认知实际和思维基础,逐步提出有关推理表达的要求,以帮助学生不断增强推理意识,提高数学表达能力.例如,教学苏教版教材一年级下册“整十数加整十数”时,可以先让学生计算 $3+2$,再引导他们类比计算 $30+20$.学生意识到:因为 $3+2$ 的两个加数中,每个加数的后面分别添了1个0,所以得数5的后面也要添1个0.也就是说 $30+20=50$.至此,教师还要引导学生用相对规范的数学语言重新表达相应的推理过程,即如:因为3个一加2个一得5个一,所以3个十加2个十得5个十.

顺序	学习内容	目标分解
1	因数和倍数的含义	初步了解猜想、验证的研究方法.
2	2、5 的倍数的特征	尝试探究 2、5 的倍数的特征,培养归纳、类比推理意识,感受说理的重要性.
3	3 的倍数的特征	经历 3 的倍数的特征的猜想与验证过程,进一步感受说理的重要性.
4	质数与合数	进一步培养自主探索、猜想验证的意识和能力.
5	和与积的奇偶性	感受探究方法的多样性,感受探究价值,发展推理意识.
6	整理与复习	对探究方法进行反思与评价,发展推理意识.

总之,培养学生的数学推理意识,要把握教学契机,遵循教学规律,踩实教学过程,集小步为大步,从而将相关课程目标落到实处,更好地助力学生核心素养的形成与发展.

参考文献:

- [1]曹培英.跨越断层,走出误区:“数学课程标准”核心词的解读与实践研究[M].上海:上海教育出版社,2017.
- [2]任利平,等.我国中小学数学推理研究的回顾与展望[J].中学数学杂志,2022(6).
- [3]蔡宏圣,周晓军.四年级学生逻辑推理素养发展状况及其培养策略[J].小学数学教育,2021(6下).
- [4]中华人民共和国教育部制定.义务教育数学课程标准(2011年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2012.
- [5]中华人民共和国教育部制定.义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022.
- [6]史宁中,曹一鸣.义务教育数学课程标准(2022年版)解读[M].北京:北京师范大学出版社,2022.

【作者简介】王兆正,江苏省苏州工业园区唯亭实验小学.

【原文出处】《小学数学教育》(沈阳),2023.5下.7~9

【基金项目】本文系江苏省教育科学“十三五”规划课题“叶圣陶儿童种子观下生长性数学课堂的实践研究”(课题编号:YZ-c/2018/19)的阶段性研究成果之一. <https://www.rdfyb.com/>