

【学生培养】

小学生数学高阶思维培养 路径的实践研究

孙艳君

【摘要】学生数学核心素养的培养是当前数学教育改革的焦点,复杂的问题情境和高阶的数学思维是学生数学核心素养发展的场域.以综合学习为载体的高阶思维培养是促使学生自我发展的有效途径,更是落实核心素养的实践路径之一.首先阐述高阶思维与综合学习的关系,高阶思维是综合学习的培养目标,综合学习是高阶思维的培养载体;其次从课例实施的角度,介绍了小学生高阶思维培养的实施路径.

【关键词】高阶思维;综合学习;小学数学

一、问题的提出

学生数学核心素养的培养是当前数学教育改革的焦点,复杂的问题情境和高阶的数学思维是学生数学核心素养发展的场域.当前数学课堂教学,虽然许多教师知道核心素养的重要价值,但对于核心素养如何落地缺乏有效的指导建议和可操作的实践策略,结果导致依然重视基础知识的传授与基本技能的训练.高阶思维着眼于数学知识整体、着眼于数学知识关联,而综合学习是综合应用数学知识,或把数学知识与其他知识综合应用来解决复杂的问题情境,恰恰可以为学生的高阶思维发展提供场域.以综合学习为载体的高阶思维培养是促使学生自我发展的有效途径,更是落实核心素养的实践路径之一.

二、理论基础

围绕高阶思维和综合学习这两个关键词,笔者对国内外相关研究进行了梳理,结果发现高阶思维着眼于数学知识整体和数学知识关联,综合学习强调数学知识的整体性 or 把数学知识与其他知识综合应用来解决问题,二者有着综合性的相通之处.

(一)高阶思维是综合学习的培养目标

梳理相关研究,不难发现高阶思维是综合学习

的培养目标.本文以布鲁姆的认知目标分类理论为基础,综合马扎诺的“十种需要在教学中关注的思维能力”已有研究成果,立足于数学学科思维的设定,界定出学生的小学数学学科高阶思维,具体表现如下:

(1)抽象:从问题情境中获取有用的信息,并准确分析其间的关系.

(2)表征转换:用自己的语言或符号,图示、表格等形式呈现题中的有用信息.

(3)归纳:从个别的事物中概括出一般性概念、原则或结论.

(4)演绎:根据问题情境提出命题,并运用逻辑的规则,导出完整且准确的结论.

(5)类比:对问题中的关系、思路等进行准确替代或联系.

(6)模型:从实际情境中感悟,用科学的语言表述,用数学符号表达.

(二)综合学习是高阶思维的培养载体

关于综合学习的国内外实践研究较多,英、美、法、日、新加坡等发达国家很早就重视数学的应用和实践,对学生综合能力也提出了具体的要求,这

体现在他们的国家课程标准中

国内的综合学习反映到数学学科一般指的是“实践与综合应用”，主要是从2001版课程标准颁布以后，开始以硬性要求进行的，大规模的实践研究由此开始。它强调以实践活动为平台，旨在提高学生探索问题、解决问题的能力，通过丰富多彩的实践活动，培养学生的实践能力与创新精神，改变学生单一的学习方式。

张华认为“实践与综合应用”作为一个新的版块，没有融入其他三个领域内容之中，首先考虑到的就是其综合性、整体性与发展性，其次“实践与综合应用”更关注数学知识与学生的已有经验、现实生活以及外部情境的紧密联系。

赵艳辉指出原有的数学课程通常是数、代数、几何、统计按照各自的体系以直线式的结构发展，没有把数学看作统一的整体，相互之间的联系不多，综合学习力求通过调整课程结构，探索数学概念之间的内在联系，综合应用所学的知识和方法解决问题的，强调数学知识的整体性和现实性。

通过以上研究我们发现，高阶思维着眼于数学知识整体、着眼于数学知识关联，而综合学习是综合应用数学知识，或把数学知识与其他知识综合应用来解决问题，恰恰可以为学生的高阶思维发展提供场域。

三、小学生高阶思维培养的实施路径——以《谁的体积大》一课为例

通过“用长方形纸卷圆柱”的探索活动，鼓励学生应用所学的圆柱的表面积和体积的知识，经历想象、猜想、验证、发现等过程，探究侧面积相同的长方形，怎样卷成的圆柱体积最大。学生在操作探究、动手实践、体验活动中参与知识的生成、发展过程，体会、了解数学知识的来龙去脉。在解决问题“谁的体积最大”的过程中，经历探索规律的过程中，体会一些变量之间的关系，通过不同角度的思考和探究，积累数学学习经验，拓宽思维场域。

(一) 抽象

教师提出问题：如果把手中的纸看成一个平面图形长方形的话，能把这张纸变成立体图形吗？学

生用长方形纸围出很多立体图形，但是大多数都把它围成了圆柱。有的学生围成的圆柱是以长为底面周长、以宽为高的圆柱，而有的同学围成的圆柱是以宽为底面周长、以长为高的圆柱，同一张纸围成的不同圆柱，谁的体积大？少部分学生看到两张纸的形状相同，侧面积相等，就直观地认为它们围成的圆柱体积相等，大多数学生认为圆柱越粗体积越大，即以长为底面周长圆柱体积大于以宽为底面周长圆柱体积。这些结论其实都是学生从问题情境中获取有用的数学信息，抽象出符合自己的认知基础和知识经验的数学知识。

师：这是一张长30cm、宽20cm的长方形纸（板书：长=30cm，宽=20cm），老师现在能把这个平面长方形变成立体图形，你们信不信？注意，在变的时候一定要充分利用这张纸，想一想怎样才能充分利用这张纸呢？（不能重叠）

师：这是以宽为底面周长，以长为高的圆柱，这是以长为底面周长，以宽为高的圆柱，猜猜它们体积一样大吗？都是同一张纸围的，体积怎么会不一样大呢？到底谁的体积大？（板书：谁的体积大？）说说想法。

(二) 表征转换

学生按照要求自己动手，利用长方形纸围成不同的（无底面）圆柱，并试着通过语言、图示、表格等来描述两个圆柱的体积之间的大小关系。通过实际的计算和表格数据的对比，结果表明圆柱越粗体积越大，即以长为底面周长圆柱体积大于以宽为底面周长圆柱体积。同时有部分学生提出质疑，以宽为底面周长的圆柱的高还比较高呢，圆柱的体积与底面积和高都有关，为什么底面积的大小对圆柱的体积影响较大，而高的大小对圆柱的体积则无较大影响。这和学生以前的认知是矛盾的，他们认为圆柱的体积应该受底面积和高的双重影响，为什么这里“高”的作用不大呢？但仅从两组数据还无法给出解释。

师：光凭眼睛看确定不了谁的体积大，那怎么才能知道到底谁的猜测对呢？在算之前先来看小



组学习指南,谁来读一下?

学习任务1:围一围,比一比,谁的体积大?

学习指南

1. 做圆柱(建议3分钟)

用长30cm、宽20cm的长方形纸围成圆柱,可用透明胶带进行连接

(1)小组中2位成员做以长为底面周长的圆柱

(2)其余成员做以宽为底面周长的圆柱

2. 比体积(建议5分钟)

(1)计算两个圆柱的体积(用计算器算),完成学习卡片表格(结果保留两位小数)

(2)比一比,想一想,你们有什么发现?

师:有两点提醒大家注意,一是刚才我们每个同学手里都有一张纸,现在小组里只保留两张纸,另外两张收起来,只用两张做。二是每次的计算结果大于两位小数的时候,四舍五入保留两位小数,然后取消之后再接着算,计算结果记录在4人小组学习卡1上。明确学习要求了吗?下面开始研究。

(学生小组学习,教师寻找数据一致的小组汇报,参见下页表1)

表1

底面周长 /cm	侧面积 /cm ²	底面半径 /cm	底面积 /cm ²	高/cm	体积/cm ³
20	600	3.18	31.75	30	952.5
30	600	4.78	71.74	20	1434.8

生:侧面积相同,底面积越大体积就越大。

师:底面积的大小是由谁决定的呢?那在这里半径的大小又是由谁决定的呢?(师板书:侧面积相同,底面周长越大,体积越大)那高对体积的大小有没有影响呢?先不着急说,随着接下来的学习你的体会会更深! (“高”上面板书:?)

师:我们得到了圆柱1和圆柱2(师编号1、2),都谁猜对了?这个长方形是这样的,所有的长方形都是这样的吗?(师板书:在结论后面打“?”)有的同学说是,有的同学说不是。

(三)归纳

不完全归纳推理是推理中比较常用的一种方法

法,在集合中有每个类中具有代表性的元素,从而归纳概括出一般结论的同时,形成由个别到一般的归纳思维。教师提出“这张长方形纸还能围成体积更大的圆柱吗”,引导学生应用上一步得到的结论,得到体积更大的圆柱。学生把这张长方形纸长边重合或者宽边重合对折,进行二等分,然后再拼接在一起,就可以得到两个不一样的长方形。两个不一样的长方形分别以长和宽作为底面周长,就可以做出四个不一样的圆柱。这样就有了六个不一样的圆柱,也就有了六组不同的数据。从六个侧面积相同的体积不同的圆柱“归纳”出:侧面积不变,底面周长扩大为原来的几倍,底面积扩大为原来的几的平方倍,而高缩小为原来的几分之一,那最后的体积就扩大为原来的几倍。

师:现在还是这张纸,老师提一个有挑战性的任务,敢接受挑战吗?你还能不能得到体积和黑板上两个都不一样的圆柱呢?(把它剪开)怎么想到剪开的呢?(对折再平分)为什么要对折?

师:是不是这个意思?看大屏幕,我们把这张长方形纸长边重合或者宽边重合对折,进行二等分,然后再拼接在一起,就可以得到两个不一样的长方形。什么变了?什么没变?

生:面积没变,形状变了。

师:侧面积没变,但是长和宽的数据变了。现在用这两张新的长方形纸,你又能得到几个圆柱呢?先不着急动手,谁来读一下学习指南?

学习任务2:剪一剪,围体积最大圆柱

学习指南:

1. 做圆柱

(1)小组中2位成员用沿长二等分长方形纸,做体积更大圆柱

(2)其余成员用沿宽二等分长方形纸,做体积更大圆柱

2. 算体积

(1)计算2个圆柱的体积,可以用计算器,完成下表(结果保留两位小数)

(2)比一比,想一想,你们有什么发现?

师:小组里相邻两个同学组成2人学习小组,

每组的操作材料共有4张,2张是长边重合对折二等分的,归两名同学,另2张是宽边重合对折二等分的,归另外两名同学,同样,每个小组有两张2人小组学习卡,两人完成其中一张,另两人完成另一张,注意卡片和操作材料是对应的。

(学生小组学习,师巡视正确数据)

师:哪个小组愿意到前面来展示和汇报你们的结果?我们先让长边重合对折再拼接的来汇报。(参见表2)

表2

底面周长 /cm	侧面积 /cm ²	底面半 径/cm	底面积 /cm ²	高/cm	体积/cm ³
60	600	9.55	286.38	10	2863.8
10	600	1.59	7.94	60	476.4

师:你们做出的圆柱确实跟刚才的两个圆柱体积不一样大了!(师编号3、4)说说你们有什么发现?

生:侧面积相同,底面周长越长,圆柱的体积越大。

师:下面请宽边重合再拼接的来说一下你们的结果?(参见表3)

表3

底面周长 /cm	侧面积 /cm ²	底面半 径/cm	底面积 /cm ²	高/cm	体积/cm ³
40	600	6.37	127.41	15	1911.15
15	600	2.39	17.94	40	717.6

师:又得到了两个体积都不一样的圆柱!(编号5、6)底面周长长体积就一定大吗?那高呢?圆柱的体积不是底面积乘高吗?现在我们一共做了6个圆柱,得到了这6组数据,你能想办法把这些圆柱和数据重新排列一下吗?如果按底面周长从小到大排列,那这些圆柱呢?仔细观察这6组数据,说说你的想法。

生:又粗又矮的圆柱体积大,又细又高的圆柱体积小。

生:底面周长扩大为原来的6倍,底面积扩大为原来的36倍,高缩小为原来的六分之一,抵消之

后,那最后的体积扩大为原来的6倍。

(四)演绎

根据数据分析得到的结论是否普适于所有符合条件的圆柱,学生的心里是不确定的。教师适时引导学生,由于完全归纳推理具有一定的局限性和不可实现性,继续用数据分析所有符合条件的圆柱,是一种不实际的推理原则。动手操作和实际计算一定要与更高阶的演绎思维活动结合起来,经历形象与抽象等多种思维沉思的过程,从而概括出更一般的结论。教师引导学生用字母分别来表示长方形的长和宽,学生在此基础上进行二人合作证明。

师:现在从数据上看确实是这样的,你能想明白其中的道理吗?这个问题非常有挑战性,我们以最开始得到的两个圆柱为例,底面周长为20cm的圆柱的体积为 V_1 ,底面周长为30cm的圆柱的体积为 V_2 。请看学习指南。(板书: V_1 、 V_2)怎么用 a 、 b 、 π ,表示出 V_1 和 V_2 并比较出二者的大小呢?

生:用 V_1 比 V_2 最后抵消之后是多 $b:a$,因为长方形的宽是小于长的, $b < a$,所以 $V_1 < V_2$ 。

师:刚才我们通过实际的操作计算得到了以宽为底面周长的圆柱体积小于以长为底面周长圆柱的体积,现在我们通过推理又进一步证明了这个结论。

师:可不可以把任意一个长方形的长设为 a ,宽设为 b ,一个作底面周长,另一个就作高,侧面积一定,也就是 a 和 b 的积一定,底面周长越短 b 越小, a 越高,体积就越小,底面周长 a 越大,高 b 越小,面积就越大。

(五)类比

有了演绎证明的过程,学生完全确信“侧面积相同,底面周长越大体积越大”这个结论是正确的。由此,教师提出更有挑战性的任务:还是这张长方形纸,能不能得到体积更大的圆柱?学生直接把二等分长方形纸类比成三等分、四等分……,然后把等分后的长方形纸条拼接成一个长超长的长方形,最后把超长长方形的长作为底面周长宽为高制作成一个底面积超大的圆柱,这样圆柱的体积就会非常大。

从不同角度展开思考,或打破原有的思维模式,创造性地解决问题.设计开放性试题的主要就是在解决问题的过程中提高学生的思维能力,特别是增强思维的灵活性.命题时,教师可利用数学开放题的灵活性和创造性,引导学生体验数学的魅力,领略数学的奥妙.

【题例6】 $4 \div \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2}$,除了用图3说明算理,你还想到哪些方法说明算理?请写出你的想法.

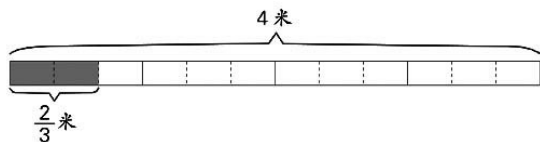


图3

本题考查学生对分数除法的意义及计算方法的掌握,通过再现知识的形成过程和学生的思维过程,反映过程性目标的达成情况.学生除了运用直观图解释算理,还可以运用商不变的规律来解释,例如, $4 \div \frac{2}{3} = (4 \times \frac{3}{2}) \div (\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}) = (4 \times \frac{3}{2}) \div 1 = 4 \times \frac{3}{2}$;还可以运用分数乘法的意义来说明,例如, $4 \div$

(上接第52页)

师:刚才我们不仅通过实际的操作计算得到了,侧面积相同,底面周长越长体积越大,而且现在我们通过推理又进一步证明了这个结论是成立的.现在还是这张纸,你能不能得到体积更大的圆柱了?

生:剪三次,剪四次,剪更多次之后,再拼接之后以长方形的长为底面周长,长方形的宽为圆柱的高,就可以得到了.

(六)模型

2022年版数学课程标准中关于“模型意识”的内涵是这样表述的:“模型意识主要是指对数学模型普适性的初步感悟.”其主要表现为:“知道数学模型可以用来解决一类问题,是数学应用的基本途径;能够认识到现实生活中大量的问题都与数学有关,有意识地用数学的概念与方法予以解释.”让学生通过应用数学知识解决实际问题,从而知道数学模型可以用来解决一类问题.

师:在我们的实际生活中就有这样的例子,一起来看一下,2012年7月21日北京市发生了特大暴

$$\frac{2}{3} = 4 \div (2 \div 3) = 4 \div 2 \times 3 = 4 \times \frac{3}{2}; \text{等等.}$$

五、试题形式:打开人文之门

小学数学命题应克服严肃呆板的成人化模式,力求有创意.首先,可以改变传统数学命题纯文字的呈现模式,采用生动有趣的新颖形式,使学生一见就产生喜爱之情,从而在轻松、愉悦、没有压力的状态下完成测试内容.其次,还可以设计卷首、题首、卷尾语等形式提醒学生,把关爱融进试卷.比如,卷首:“亲爱的小朋友,愉快的学习将告一段落了,请你用学到的数学知识来解答下面的问题吧!仔细审题,认真答题,你一定会有出色的表现,祝你成功!”卷尾:“恭喜你做完了,是不是再检查一遍?或许你会更满意.”像这样热情亲切的话语,能消除学生与考试之间的隔阂,激发学生的参与热情,端正考试心态,从最佳角度认识自己,挑战自我.

【作者简介】马伟中,江苏常州市武进区教师发展中心.

【原文出处】《小学教学》(郑州),2023.6下. 33~35

雨,这是当时的场面.看看当时的降水量达到多少了?才40~80毫米,换算成我们熟悉的厘米做单位是4到8厘米,才这么矮怎么能算是特大暴雨呢?(如果把北京看作是一个超大的不规则图形的话,这6到8厘米相当于是直柱的高,那暴雨的降水量就是北京市的面积乘上这个高.)

师:路面上的雨水通过什么排出去?下水管道才这么粗,短时间内能排完吗?这样就形成了比较深的积水,进而发生洪灾.

【作者简介】孙艳君,东北师范大学附属小学,硕士,高级教师,研究方向:数学教育(吉林 长春 130022).

【原文出处】摘自《中小学教师培训》(长春),2023.6.54~58

【基金项目】吉林省教育科学“十四五”规划课题“核心素养导向下小学数学高阶思维培养的实践研究”(课题编号:GH21677)