

数学文化融入高中数学 课堂的实践与思考

——以“三角恒等变换”第一课时教学为例

鲁贤龙

【摘要】《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》从课程性质、课程内容、教学建议等多个方面对数学文化在数学教学中的融入做出了重点要求.以“三角恒等变换”第一课时的教学为例,阐述在教学中渗透数学文化的具体过程,并做必要的反思与总结.

【关键词】三角恒等变换;数学文化;数学应用

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》对数学文化在数学课堂中的融入提出如下要求:

在课程性质方面,课程标准要求课程的实施方式必须得到优化,重点培养学生在运用数学知识实际问题方面的能力,并且特别提出数学文化在课程中的渗透,让学生可以在学习数学的过程中体会到数学文化的文化价值、应用价值、审美价值.

在课程内容方面,强调教师应当在必修、选择性必修以及选修内容中渗透数学文化,注重组织学生开展数学文化的收集和阅读活动,让学生学会正确地解读数学文化中的信息.

在教学建议方面,指出在数学日常教学中,教师要注重做好数学文化的渗透,从而达到拓展学生文化视野的目的,全面提升学生的综合素养^[1].

不难发现,新教材高度重视数学文化和教学内容之间的融合,提倡将数学的最新研究成果纳入到教材中,注重引导学生探索数学的实用性价值,从而提升教学效果.

通过上述分析,足以说明将数学文化融入数学教学中的重要性.因此,笔者在“三角恒等变换”第一课时的教学中采取了渗透数学文化的教学手段,以供参考.

一、学情教材分析

“三角恒等变换”是人教A版(2019)高中数学必修一的内容,对于高一年的学生来说,学生在初中阶段已经学习过代数变换的知识,在本单元,学生会继续对两角和与差、二倍角的正弦等公式进行深入的探索.利用熟悉的知识来实现三角变换,有助于学生逻辑推理以及数学运算素养的有效发展.同时,学生在初中阶段学习了锐角三角函数的知识,也就具备了学习这节课内容的先决条件.但是学生的抽象概括能力还没有获得较好的发展,并且学习主动性也不强,需要教师进一步激发学生的学习兴趣.

二、教学目标分析

本节课的教学,主要是通过数学文化的渗透来帮助学生串联起知识形成的过程,从而让学生能够对相关知识点建立起结构化的认识.具体地说,本节课要达成以下的目标:

①让学生通过探究的方式来掌握两角差余弦公式的基础知识,并且可以使用相关的知识来解决实际问题.

②加强学生对数学思想方法的理解,重点引导学生了解数形结合的思想,帮助学生正确应用数形结合思想去解决问题.

③通过在课堂上渗透数学故事,激活学生对数学的探索兴趣,让学生切身感受数学家的探究过程,

树立正确的数学学习目标,培养学生坚韧不拔的意志品质.

三、教学环节分析

(一)渗透文化,引入课题

我们在这节课的学习中要去了解两角差余弦公式,那么大家请想一想,我们可以怎样使用数学符号的形式来表示出结果?

实际上,我们可以选择任意两个字母来代表两个角,比方 A 和 B ,那么两个角的差就可以表示为 $A - B$ 或 $B - A$,大家是不是就能够顺势得出,两角之差的余弦怎么表示了? 没错,就是 $\cos(A - B)$. 接下来,我们就是要去研究 $\cos(A - B)$ 还可以写成什么!

在学习这节课之前,实际上大家在初中就已经学习过正弦、余弦这些基础的三角函数知识了,大家当时使用的主要数学思想是什么?

(学生能正确回答出数形结合思想这一答案)

实际上,三角函数是十分受数学家们青睐的一种函数,而且很久以前,数学家们就发现,在研究三角函数时,任一锐角对应直角三角形三边是成比例的,在发现了这个规律之后,数学家们便想到使用符号的方式来表达这种关系,从而让这种关系的普遍性得到体现,于是我们现在就有了正弦、余弦的概念,并且在对这些关系的不断深入研究中,数学家们逐渐归纳总结出了当前我们经常使用的三角函数. 而数学探究是永无止境的,数学家们很快发现,在他们研究出了一层关系之后,后面还有更多的关系等待挖掘,于是又有人提出了质疑,对于两个确定的角 A 和 B , $\cos(A - B)$ 是不是确定的?

德国著名数学家黎曼有一句名言:每个数学公式背后,都有一个反映其本质的几何模型. 图 1 来自深圳中学朱华伟校长编写的《无字证明集锦》,你发现了什么^[2]?

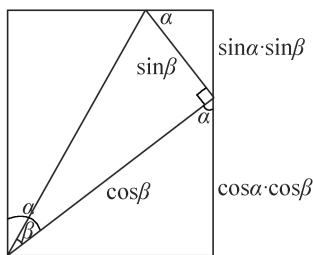


图 1

设计意图 首先使用简单的问题调动起学生的学习兴趣,并且唤醒学生的已有知识经验. 和直接告诉学生这节课要学习什么知识相比,这种形式的导入可以取得更好的效果. 接下来,再引导学生去了解三角函数中的数形结合思想和其中蕴含的数学故事,让学生意识到数学的发展是不断深入的,并且让学生自然而然地将自己的角色变换到数学家的位置上去,联系数学家之前的探索经历,将“ $\cos(A - B)$ 是确定的”这一观念传递给学生,让学生带着验证的态度参与到接下来的学习中去.

(二)实践探索,加深理解

现在,结合 A 和 B 都是确定的这一条件,我们也产生了共同的想法,那就是当 A 和 B 确定时, $\cos(A - B)$ 也是确定的. 那么我们是否可以使用已经学习过的知识,用两个角的正弦值、余弦值来表示出 $\cos(A - B)$? 你认为有哪些种可能? 下面就请大家使用已经学习过的知识来进行探索吧!

(给学生留出大概十五分钟的时间,让学生用合作的方式来进行研究.)

老师刚才对课堂进行了观察,发现全班有将近一半的学生能够得到正确的结论,还有一部分学生遇到了困难,那就请成功得到结论的同学来帮助那些遇到困难的同学吧!

(邀请一些学生上台来介绍自己的推导方法)

需要注意的是,在推导 $\cos(A - B)$ 的过程中,我们这里的角并不是任意的角,而是要根据直角三角形的实际背景,确保 A 是大于 B 的. 那么对于两个角是任意角时,大家的推导是否还成立,因为课堂上的时间有限,大家可以在课后进行自主的探索,之后再来帮助其他人解惑,告诉我们你的答案.

设计意图 在这一环节中,学生找到了两种解决问题的方法,一种是使用坐标法,在平面直角坐标系中画出单位圆,利用圆的旋转对称性,最终得到结论;另一种是利用“猜想—证明”法,可惜在使用这种方法时,很多学生都出现了半途而废的情况,大多数的学生只有特殊值的验证,没有一般性的论证. 通过给定学生充足的时间,让学生去进行自主探索,能够让学生感受到学习的成就感,有助于学生综合素质的提升.

(三) 挖掘文化, 深化思维

其实 $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ 的证明自古以来就备受数学家的青睐.

在古代, 古埃及天文学家托勒密在三角函数弦表中利用图2给出了证明; 数学家帕普斯在《数学汇编》中利用图3给出了证明.

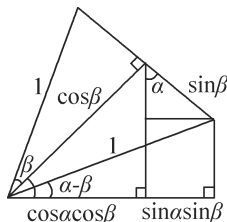


图2

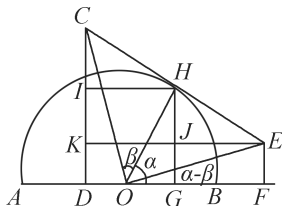


图3

在近代, 美国数学家麦克肖恩应用三角形全等以及两点间的距离公式进行推导与证明, 如图4.

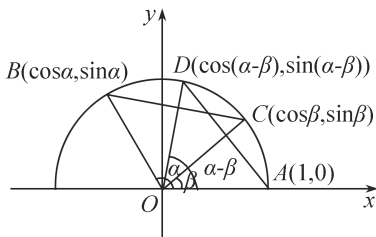


图4

不仅如此, 我国著名数学家、中国科学院院士张景中先生用面积法巧妙地解决了这一问题, 如图5. 该证明不仅图形简单, 便于观察, 而且推理自然, 易于接受, 妙不可言^[2].

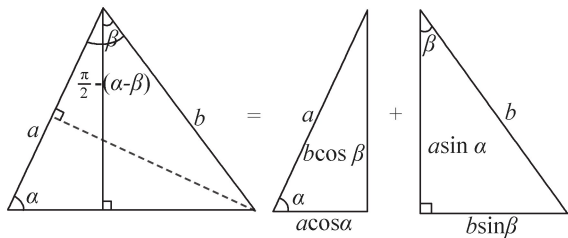


图5

设计意图 教师通过介绍古今中外数学家对公

式的不同证明方法, 帮助学生寻求知识的源头, 感受其发展历程, 体会知识传播的魅力, 激发学生的学习热情, 无形中渗透数学史, 传播数学文化, 同时增强民族自信心与自豪感.

(四) 借助文化, 激励学生

在刚刚的探究中, 无论是同学们所使用的方法, 还是数学家的奇思妙想, 无不轻而易举地解决了问题. 然而, 数学的真实历史却没有这么简单, 现在看似简单的一个结论都是数学家们历经千辛万苦才得到的.

我们都知道, 解析几何的创立者是士兵数学家笛卡尔, 大家现在对这个名字很熟悉, 知道他是一个伟大的数学家, 但是你知道吗, 实际上笛卡尔在23岁的时候加入了军队, 但是他对数学的喜爱却没有消失, 在军队里面仍然坚持探索数学, 在一次受伤之后, 笛卡尔正躺在床上养伤, 这个时候仍然在挂念着数学, 他在思索中发现了窗户上的一只蜘蛛, 将这只蜘蛛和墙角联系在了一起, 由此创立了空间直角坐标系. 这个小故事流传到现在, 已经有了很多的版本, 大家可以在课后查阅有关资料, 了解更多关于笛卡尔的故事.

设计意图 在本节课的探究活动中, 很多学生的学习过程和成果不尽完美, 通过这个小故事的讲述, 可以让学生意识到很多事情是不会一帆风顺的, 即便是数学家也不例外, 从而让学生学会对事物的两面性产生深刻的思考, 提升学生学习的自信心和忍耐力, 优化学生的思维品质和学习态度.

(五) 归纳总结, 整体认知

通过本节课的学习, 我们学习到了什么知识? 是怎样构建出知识的? 你还有什么困惑? 在课后还想去探索哪些知识? 我们都使用了哪些方法来验证这个公式?

设计意图 在学生回答这些问题的过程中, 可以发现学生们对于公式的推导已经有了基本的认识, 可以记住公式, 从而为学生后续推导更多公式奠定了良好的基础.

四、反思启示分析

在这节课的教学中, 我采用了对比的研究方法, 即在其中一个班级的教学中讲述数学文化, 在

另一个班级的教学中则不涉及数学文化。结果显示,接触到数学文化的班级的学生在课堂上表现出了更大的积极性,而且学生课后作业的完成情况更加理想。由此可以看出,数学文化的使用能够有效地调动起学生的学习兴趣,并且让学生的学习成绩得到提升,使学生对学到的知识产生更加深刻的理解。

因此,在新课程标准的背景下,我们要对教学内容进行精心的处理,加强对数学文化的渗透。

(一) 陈列数学历史

数学历史是数学文化的重要传播载体,在高中数学教学中使用数学史资源,可以让学生接触到数学的独特魅力,让学生了解数学知识发展的全过程,体会到数学知识传播的重要性。通过讲述数学历史,还可以增强数学教育的思想教育价值,让学生去学习数学家辛苦钻研的精神,意识到成功的来之不易,从而让学生去思考学习数学的价值,体会到数学学习的成就感。教师可以使用两种方式陈列数学历史,一种是使用数学历史来帮助学生了解数学知识的产生,另外一种借助数学历史来激发学生的学习兴趣,让学生获得学习数学知识的动机。

(二) 欣赏数学之美

数学的美感具有一定的抽象性,需要教师在引导学生进行内心感受的同时,使用直观性的手段来帮助学生进行直接的感受,从而让学生更好地了解数学的魅力。数学之美有很多的表现形式,包括数学图形的对称之美、数学语言的简洁之美、数学表达的统一之美等等。教师要带领学生在现实生活中的各个领域去感受数学的美,从而逐渐地改变学生对数学学习枯燥乏味的印象,让学生带着欣赏的态度去学习数学知识。

(三) 运用数学思想

数学思想是数学文化的精华,不仅可以应用在数学领域,在物理、生物等学科领域也有着广泛的应用价值。因此,教师要注重加强对数学思想多维度、多方面的渗透。同时,由于数学思想是一种隐性的教育内容,因此,教师要注重使用具体的案例将数学思想充分体现出来,引导学生构建完备的逻辑思维体系,确保学生的数学学习能力得到稳定的提升。通过

对高中数学教学内容进行分析,教师在教学中要重点加强数形结合思想、分类讨论思想、函数与方程思想、转化思想等思想的渗透,让学生解决问题的能力获得提高。

(四) 感悟数学应用

由于数学是一门工具性很强的学科,因此和其他学科之间的关系更加密切,在生活中也随处可见,故而在生活中处处彰显数学文化。比如在学习勾股定理时,教师可以引导学生将所学知识应用到工程建筑方面,还可以在教学中向学生介绍黄金分割在雕塑、绘画中的应用等等,从而让学生的视野得到拓展,获得综合实践能力上的提升。

五、结束语

诚然,数学文化融入高中数学课堂绝非一朝一夕之事,依靠个人力量更是难以实现,这就需要我们广大教育工作者在思想上保持高度统一,认识到数学文化对高中数学教学的重要作用与意义;同时在行动上,主动收集教学中所能够涉及的数学文化知识,明确数学文化在教学中渗透的形式与方法,做到在课堂教学中有意识、有目的、有策略地渗透数学文化,力争课课有数学文化,人人讲数学文化。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 刘正章. 追溯数学文化气息,提升学生数学素养——基于“两角差的余弦公式”的教材分析与教学思考[J]. 中学数学杂志,2018(9):1-5.

【作者简介】鲁贤龙(1988-),男,安徽省无为中学,中学一级教师,本科,全国高中数学联合竞赛“优秀教练员”,安徽省“高考优秀评卷教师”,安徽省优质课评选团体赛一等奖,芜湖市优质课评选一等奖,芜湖市“教坛新星”,无为市优秀共青团干部,主要研究高中数学教学与试题分析,发表论文多篇(238300)。

【原文出处】《中学数学杂志》(曲阜),2023.7.