

【教材分析】

七个版本新教材中平面向量投影内容比较与编写建议

张志刚

【摘要】数学课程标准明确了“向量的投影是从高维空间到低维子空间的一种线性变换”，将平面向量投影的结果由“数量”变为“向量”，并引入了“投影向量”的概念。选取七个版本新教材中“平面向量投影”内容作为研究对象，对编排顺序、问题情境、课程内容、投影向量表达式、例题和习题配置等统计分析，发现各版本教材都提出了投影、投影向量的概念，部分版本教材推导了投影向量的表达式，并提出教材编写建议。

【关键词】新教材；平面向量投影；内容比较；核心素养

一、问题的缘起

“现代数学强调用代数的方法研究几何问题，其本质是通过几何图形建立直观，通过代数运算刻画规律。”^[1]《普通高中数学课程标准（2017年版）》（以下简称《课标（2017年版）》）设置了“几何与代数”内容主线，必修内容包括平面向量、复数和立体几何初步，选择性必修内容包括空间向量与立体几何、平面解析几何。设置理由：“一是为代数、特别是线性代数的学习建立几何直观，这个直观对于学生的未来学习是非常重要的；二是让学生知道如何用代数运算解决几何问题，这是现代数学的重要研究手法。”显然，要使数与形结合起来，需要桥梁，需要有数形结合的工具。笛卡尔（R. Descartes, 1596 – 1650）发明了直角坐标系，成功地在数与形之间搭建了桥梁，而向量概念的建立，则使我们有了“集数与形于一身的数学研究工具”。

向量不仅有丰富的几何内涵，向量及其线性运算与数量积运算还构成了精致且有广泛应用的代数结构，可把有关的几何问题简便地转化为相应代数问题处理^[2]。与数量积息息相关的投影也愈发引人注目。《课标（2017年版）》新增了“通过几何直观，了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义”的要求，提出了“投影向量”的概念，并在附录“案例9 向量投影”中明确了向量投影的本质：“向量的投影是高维空间到低维子空间的一种线性变换，得到的是

低维空间向量”^[3]，澄清了投影的结果是向量，完成了对“向量投影”和“投影向量”的明确区分。《课标（2017年版）》作出如此调整，主要基于两点考虑：一是知识讲解明确性的要求。在《现代汉语词典》（第6版）中，投影的释义为：“数学上指将图形的形状投射到一个面或一条线上。”^[4]可见，投影是一个几何概念。但以往的课程标准和教材大都简单地将 $|\mathbf{a}| \cos \theta$ （其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角）称作向量 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向上的投影，引发了学界“向量投影结果是数量还是向量”旷日持久的争论，造成了认知上的混乱，违背了概念引入的无矛盾原则。客观上也导致了教师们只能含糊其辞，甚至避而不谈，应用投影解决问题更无从谈起，遮蔽了向量投影的功能和价值。二是数学内容逻辑关系的考量。到高中阶段，内容安排应该以数学知识的内在逻辑关系为第一要务^[5]。《课标（2017年版）》强调课程结构的整体性、课程内容的整体性、结构比内容重要^[6]。向量投影不仅赋予了数量积鲜明的几何意义和丰富的内涵，还是学习平面内点到直线的距离、空间向量投影、空间点到直线的距离等内容的基础。强化平面向量投影的学习，体现了数学的整体性、逻辑的连贯性、思想的一致性、方法的普适性、思维的系统性，有利于学生构建衔接自然、浑然一体的高中数学知识体系。

《课标（2017年版）》对平面向量投影的修订为教材编写、“教”与“学”活动提供了理论基础和实践指南。那么，各版本新教材对此修订有何回应呢？教

材编写还有哪些改进空间呢?

二、七个版本新教材的比较

截至2020年,根据《课标(2017年版)》编写的新教材共7套,供全国选用。其中,人民教育出版社2套,北京师范大学出版社、上海教育出版社、江苏凤凰教育出版社、湖南教育出版社、湖北教育出版社各1套(以下分别简称人教A版、人教B版、北师大版、沪教版、苏教版、湘教版、鄂教版教材),实现了教材编写的“一标多本”,各版本教材在体例结构、内容处理上环肥燕瘦、各有千秋,体现了教材的多样化。

(一)编排顺序

所有版本新教材都将平面向量投影内容安排在必修“平面向量及其应用”单元,(人教B版把此单元拆分为“第六章平面向量初步”“第八章8.1向量的数量积”两部分),为后续学习相关内容做好铺垫。具体而言,各版本新教材都把平面向量投影安排在“平面向量的数量积”一节,但呈现顺序有所差异。沪教版教材先安排向量的投影,再安排向量的数量积,体现了层层递进、平稳过渡的版本特色,其余版本教材则先安排向量的数量积,再根据需要安排向量的投影。

(二)问题情境

数学学科核心素养通常是在综合化、复杂化的情境中,通过个体与情境的有效互动生成的,素养的形成与情境密不可分。向量具有丰富的物理背景,向量内容的教学,可以将物理情境作为重要的科学情境贯穿向量教学的始终。例如,可利用物理学中力的概念、力的合成与分解、力所做的功等内容创设物理背景,提出向量运算法则等数学问题。比较发现,各版本新教材都是通过回顾“功”的定义和计算公式的推导导入新课。但沪教版教材通过类比“‘在位移方向上的分力’是作用力 f 在位移向量 s 上的投影(如图1)”,引出了向量在一条直线或另一个向量方向上的投影的概念,即创设“力所做的功”的物理情境目的是引入投影,而其余版本教材创设同样情境是为了引入数量积。

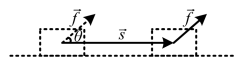


图1

(三)课程内容

具体课程内容详见表1。

从表1可知,各版本教材都积极呼应《课标(2017年版)》的修订,在教材正文中提出了投影、投影向量的概念。例如,人教A版教材:“如图2,设 a, b 是两个非零向量, $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{CD} = b$,我们考虑如下的变换:过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B ,分别作 $\overrightarrow{CD}$ 所在直线的垂线,垂足分别为 A_1, B_1 ,得到 $\overrightarrow{A_1B_1}$,我们称上述变换为向量 a 向 b 投影, $\overrightarrow{A_1B_1}$ 叫做向量 a 在向量 b 方向上的投影向量。”

不同之处主要有:

(1)“投影”概念涵义不同。人教A版和苏教版教材将上述变换称为向量 a 向 b 投影,即把“投影”视为一个动态过程,为动词,与《课标(2017年版)》中对投影的阐释契合度较高。而其他版本教材则将“投影”视为上述变换后得到的结果,等同于“投影向量”(表1中用“=”表示),是“投影向量”的简称,为名词。

(2)“投影”结果属性不同。湘教版教材中将 $|a|\cos\alpha$ 称为 a 在向量 b 方向上的投影,依然把投影结果定义成数量,其余版本教材则将投影视为向量。《课标(2017年版)》关于向量投影概念最本质的变化,就是将向量投影的结果由“数量”调整为“向量”。从高维空间视角分析,向量在子空间的投影,本质上是向量的正交分解,分解为两个向量:一个向量

表1 各版本教材内容一览表

教材版本	所属章节	概念呈现	“投影”涵义、词性
人教A版	6.2.4 向量的数量积	投影、投影向量	变换过程、动词
人教B版	8.1.1 向量数量积的概念	投影向量 = 投影、投影的数量	变换结果(向量)、名词
北师大版	5.1 向量的数量积	投影向量 = 投影、投影数量	变换结果(向量)、名词
沪教版	8.2 向量的数量积	投影向量 = 投影、数量投影	变换结果(向量)、名词
苏教版	9.2.3 向量的数量积	投影、投影向量	变换过程、动词
湘教版	1.5.1 数量积的定义及计算	投影、投影向量、投影长	变换结果(数量)、名词
鄂教版	1.2.4 向量的数量积	投影向量 = 投影、投影的数量	变换结果(向量)、名词

位于子空间,另一个位于其正交补空间.将投影结果定义成向量,能更好地从投影结果中体现出原向量的性质,即向量与向量投影结果数对之间的一一对应关系.从高等数学视角分析,将投影结果定义成向量,不仅与学生在平面几何学过的概念一致,体现出投影的同素性,还可表现出向量投影的实质是高维空间到低维子空间的线性变换.从学科交叉视角分析,物理学中“力的分解”本质上就是向量的投影,力分解后是力,所以向量投影的结果也应是向量.综上,将向量投影的结果定义成向量比定义成数量更好一些,关于向量投影的修订是合理且有意义的^[7].

(3)“投影数量”定义不同.除人教A版、苏教版教材外,其余版本教材还给出了“投影数量”(或“数量投影”“投影长”)的概念,从而数量积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 就等于 $\mathbf{b}$ 的模与 $\mathbf{a}$ 向 $\mathbf{b}$ 的投影数量 $|\mathbf{a}| \cos \theta$ 的乘积.而将投影数量乘以一个单位向量,即得投影向量.需要指出的是,此处的“投影数量”即是旧教材中的“投影”.

(四)投影向量表达式

投影向量是本次课程标准修订引入的概念.投影向量是与向量垂直有关的概念.如图(略)所示, $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{ON} = \mathbf{b}$.点 M 作直线 ON 的垂线,垂足为 M_1 ,则 $\overrightarrow{OM_1}$ 就是向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 方向上的投影向量.如何表示它呢?

设与 $\mathbf{b}$ 同向的单位向量为 $\mathbf{e}$, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角是 θ ,人教A版教材针对 θ 为锐角、直角、钝角以及 $\theta = 0$, $\theta = \pi$ 等情况详加论述,得出投影向量表达式:对于

表2 各版本教材例题和

	人教A版	人教B版	北师大版	沪教版	苏教版	湘教版	鄂教版
例题	0	0	2	2	0	0	0
练习题	1	练习A:2 练习B:1	0	2	1	1	0
习题	复习巩固:0 综合应用:0 推广应用:1	习题A:1 习题B:2	A组:0 B组:0	A组:1 B组:0	感受理解:0 思考运用:0 探究拓展:0	学而时习之:1 温故而知新:0	1
复习 (参考) 题	复习巩固:0 综合应用:0 推广应用:0	A组:0 B组:0 C组:0	A组:1 B组:0 C组:0	A组:0 B组:0 拓展与思考:0	感受理解:0 思考运用:0 探究拓展:1	学而时习之:1 温故而知新:0 上下而求索:0	A组:0 B组:0 思考与实践:0
合计	2	6	3	5	2	3	1

任意的 $\theta \in [0, \pi]$,都有 $\overrightarrow{OM_1} = (|\mathbf{a}| \cos \theta) \mathbf{e}$,体现了人教A版教材的基础性、可接受性和发展性.由向量数量积的定义得 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{a}| \cos \theta$,所以 $\overrightarrow{OM_1} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}$,此式揭示了投影向量与向量数量积的联系.此外,由于 $\overrightarrow{MM_1} \perp \mathbf{b}$,所以 $|\overrightarrow{OM_1}|$ 是点 O 到直线 MM_1 的距离,而 $|\overrightarrow{OM_1}| = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}|$,这是用向量推导点到直线的距离公式的依据.苏教版、沪教版、湘教版、鄂教版教材给出了与人教A版教材类似的推导过程,但叙述相对粗简,推证的向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 方向上的投影表达式分别为: $(|\mathbf{a}| \cos \theta) \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ 、 $\frac{|\mathbf{a}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{b}|} \mathbf{b}$ 、 $(|\mathbf{a}| \cos \theta) \mathbf{e}$ 、 $(|\mathbf{a}| \cos \theta) |\mathbf{b}|$.显然,这五种表达式是等价的.

人教B版、北师大版教材都引入“投影的数量(投影数量)”的概念,并借此阐述了向量的数量积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 的几何意义,但未给出投影向量的明确表达式.

(五)例题和习题配置

例题和习题是教材的重要组成部分,其选择、布局、数量、设计等都影响着数学学习^[8].七个版本新教材的题目配置见表2.需要说明的是,此处统计限于本单元题干中明确出现“投影(向量)”词汇的例题和习题,其中习题包括该小节后的随堂“练习”、大节后的“习题”和章末的“复习(参考)题”.

分析表2可知:(1)从数量来看,各版本教材例题和习题配置数量不均衡.其中,人教B版教材题量最多(6题),鄂教版教材最少(1题).沪教版教材配置了两道例题求解投影和数量投影,北师大版教材配置了两道例题讨论投影,体现了“学以致用”.(2)从梯度来看,各版本教材题目设计更富层次

性与发展性。例如,人教B版教材将“练习”拆分为“练习A”“练习B”两层。按照题目功能,人教A版教材将习题和复习参考题细分为“复习巩固”“综合应用”“拓展探索”,苏教版则分为“感受理解”“思考运用”“探究拓展”,弹性化的设置为不同潜能的学生提供了更大的发展空间,体现了高中数学课程“不同的人人在数学上得到不同的发展”的基本理念。(3)从难度来看,各版本教材例题和习题的难度和梯度比各自旧教材有了较大提升,更加贴近评价中的试题,体现了“教—学—评—致一致”原则,改变了旧教材题目和评价试题差距悬殊、教考分离的弊端。

三、结论

向量是描述直线、曲线、平面、曲面以及高维空间数学问题的基本工具,是进一步学习和研究其他数学领域问题的基础。而投影则是构建高维空间与低维空间之间的桥梁,也是培养学生直观想象、逻辑推理、数学抽象素养的重要载体。以往的投影教学乱象丛生,根源在于课程标准和教材没有明确投影概念的本质。而徐利治教授指出:“概念是数学的基石,没有它,便无法去构筑理论体系”^[9]。基于“数学内容的逻辑”和“学生心理的逻辑”两方面的考虑,《课标(2017年版)》正本清源,对投影进行了显性化处理,基本平息了长久以来的争议。

各版本新教材积极践行《课标(2017年版)》的要求,给与了向量投影前所未有的关注,从学科体系的逻辑性、知识讲解的明确性、素材选择的适切性、学生思维的接受性等方面,对教材作了全面的优化调整。具体表现有:各版本教材都注重创设合适的数学情境引入课题;所有版本教材都在正文中明确提出了投影、投影向量的概念,(尽管投影的涵义不尽相同);大部分教材明晰了投影的结果是一个向量;五个版本新教材关注了投影向量的推导,给出了投影向量的明确表达式;部分版本教材提出了投影数量(或“数量投影”“投影长”)概念;北师大版和沪教版教材各安排了两道例题讨论投影(数量投影),其他版本教材也通过习题强化了向量投影的应用,体现了新教材的思想性、科学性、时代性,同时也反映出鲜明的版本特色。

四、教材编写建议

(一) 建议教材提高投影题目的数量和难度

当前,各版本教材向量投影的例题和习题平均数量较少,投影的作用未得以充分展现。建议各版本

教材遴选契合主题、难度适宜的优秀试题,作为例题或习题(特别是例题)充实到教材中来,达到强化知识应用、方便学生选择、对接考试评价等目的。考虑到人教A版是目前使用范围最广的版本,下面通过借鉴其他版本,对人教A版教材的例题和习题配置给出调整案例。

调整1 选用沪教版教材必修第二册第107页“例1、例2”中作为例题编入教材。

例1 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$,且 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$.求 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影与数量投影。

例2 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量, $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{ca}$ 是任意向量,它们在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影分别是 $\boldsymbol{b}'$ 和 $\boldsymbol{c}'$.求证: $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影为 $\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}'$ 。

调整理由 弥补人教A版教材未安排例题、习题数量过少的缺漏,引发师生对向量投影的重新审视与关注,深化学生对投影的理解,挖掘投影的价值。

调整2 选用2020年高考全国新高考I卷第7题作为习题编入教材。

已知 P 是边长为2的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点,则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是()

- A. $(-2,6)$ B. $(-6,2)$
C. $(-2,4)$ D. $(-4,6)$

调整理由 数量积的运算结果是实数,但向量投影的引入使得数量积的运算有了更灵活的处理方式。将此高考题充实到教材习题中,引导学生从投影视角讨论数量积问题,体会投影给解决数量积问题带来的便捷。

(二) 建议教材渗透向量投影数学文化内容

《课标(2017年版)》要求将“数学文化融入课程内容”。七个版本新教材“平面向量及其应用”单元或多或少、或明或暗体现了数学文化的内容。例如,人教A版设置“阅读与思考”栏目,介绍“向量与向量符号的由来”;北师大版教材通过“阅读材料”栏目,阐述“向量的发展历史与符号由来”;苏教版设置“阅读”栏目,揭示“向量源自力学”。可见,各版本教材都注重以“阅读材料”等辅助性栏目介绍向量发展历史等,但都未涉及与投影相关的射影几何学等背景史料。射影几何(亦称“投影几何”)是研究图形在射影变换下不变性质的几何学分支学科。中国古时利用

投影计时,发明了日晷。早在公元前,基于绘画和建筑学的需要,古希腊几何学家开始研究透视法,即投影和截影。欧洲文艺复兴时期透视学的蓬勃发展,给射影几何的发展提供了沃土。笛沙格(Desargues, 1591-1661)于1639年发表的《试论圆锥曲线和平面的相交所得结果的初稿》给出了透视法以数学上的解答^[10],以他命名的笛沙格定理成为射影几何学的基本定理。1812年,彭赛列(Poncelet, 1788-1867)随拿破仑军队远征俄国,被俘后在狱中写成《图形的投影性质》两卷,并于1822年发表了历史上射影几何学第一部系统著作——《论图形的射影性质》。他通过几何方法引进无穷远虚圆点,研究了配极对应并用它来确立对偶原理,成为射影几何学的主要奠基人。至1882年,帕施(PASCH, 1843-1930)建成了第一个完备的射影几何演绎体系。时至今日,射影几何学在航空、测量、绘图、摄影等领域都有广泛的应用。建议各版本教材增加射影几何学的演变与应用等资料,以此激发学习兴趣,拓宽学生视野,深化学生对向量投影的认识。此外,彭赛列等数学家顽强坚韧的精神也能鼓舞学生积极面对生活,体现数学学科的育人价值。

(三) 建议教材探索信息技术与投影的融合

借助信息技术,能够使数学内容变得动态化、形象化、可视化^[11]。《课标(2017年版)》要求“关注信息化环境下的教学改革”,充分发挥信息技术的绘图和计算等优势,以教育信息化带动教育现代化,为核心素养时代的教与学插上科技的翅膀。各版本教材在信息技术与课程内容的深度融合上作出了尝试,为建构数学概念、发现数学结论、突破学习难点、改进课堂生态、增强数学表达、传播数学技术积累了经验。例如,湘教版教材设计了“数学实验”栏目,基于网络画板这一动态数学学习环境,为学生理解概念创设背景,探寻规律启发思路,解决问题提供直观^[12];北师大版教材选修第一册有信息技术探究活动“利用GeoGebra绘制空间向量”。鉴于向量投影的重要性和抽象性,建议各版本教材研发信息技术工具辅助投影教学的技术,以可视化效果促进学生理解概念,同时以教材的调整带动教法学法的革新。

五、结束语

数学教材为“教”和“学”活动提供学习主题、基本线索和具体内容,是实现数学课程目标、发展数学

学科核心素养的关键性教学资源。展望未来,各版本新教材在适切性上仍有改进空间,其中有些需要通过课程标准的修订完善来实现,有些需要通过教材修订来实现,更深层次的,还需要通过教育改革乃至整个社会的综合改革来实现。教师要增强立德树人的意识和数学育人的自觉性,准确把握数学教育改革和发展的方向,关注课程标准和教材的流变演化,汲取不同版本教材的优点,突破单一版本的局限,结合学情对教材进行再加工,实现从“教教材”到“用教材”的根本转变,提升课程内容理解水平和数学教材实施能力。

参考文献:

- [1]史宁中. 数形结合与数学模型——高中数学教学中的核心问题[M]. 北京:高等教育出版社,2018:40.
- [2]李大潜,王建磐. 普通高中教科书·数学(必修第二册)[M]. 上海:上海教育出版社,2020.
- [3]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[S]. 北京:人民教育出版社,2018.
- [4]中国社会科学院语言研究所词典编辑室. 现代汉语词典[M]. 北京:商务印书馆,2012:1314.
- [5]章建跃. 核心素养导向的高中数学教材变革[J]. 中学数学教学参考,2019(6上):6-10.
- [6]王尚志,胡凤娟. 高中数学课程标准“修订思路”“组织”及“过程”[J]. 数学教育学报,2018,27(1):11-13.
- [7]刘静宜,胡典顺,姚本武. 向量投影结果究竟是数量还是向量[J]. 数学通讯,2021(12下):1-4.
- [8]邵光华,张妍. 人教A版高中数学新教材特色分析及使用建议[J]. 课程·教材·教法,2019(12):109-114.
- [9]赵阳. 数学概念教学的创造性过程——以相关系数概念的教学为例[J]. 大学数学,2020,36(6):75-79.
- [10]李文林. 数学史概论[M]. 北京:高等教育出版社,2012:133-136.
- [11]徐章韬. 用信息技术深度挖掘课程内容——以数学学科为例[J]. 教育发展研究,2015(12):29-33.
- [12]张景中,胡旺. 2019版普通高中数学(湘教版)教科书的主要特色[J]. 基础教育课程,2019(7上):7-12.

【作者简介】张志刚,山东省宁阳县复圣中学(271400)。

【原文出处】《中学数学教学》(合肥),2023. 4. 10~14