

【教材分析】

三版初中数学教材中“实数”内容的对比研究

杨正朝

【摘要】实数作为数与代数领域的重要组成部分,在初中数学中占据着基础性的地位.研究从内容和习题两个维度对三版教材进行对比分析,发现其中实数内容在章前页、内容编排、呈现方式、数学史和习题难度等方面存在着异同点.鉴于此,提出三点建议:基于学生认知特点统筹三版教材,合理开展教学;丰富教学手段,促进教学形式多元化;增设背景及知识含量,优化习题难度.

【关键词】实数;教材对比;数学史;习题综合难度

一、问题提出

教材作为教学开展的工具,是课程知识和内容的载体.对教材进行对比,能够起到厘清教材内容编排逻辑和优化教学的重要作用.《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称“新课标”)将课程内容划分为:数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践四个部分^[1],实数作为数与代数的重要内容,在初中数学中占据着基础性的地位,为后期学习其他内容起到铺垫作用.同时,对培养学生运算能力、推理能力等核心素养具有极大的帮助.

研究以人教版、苏科版和北师大版中的“实数”章节为对象.在内容上,从章前页、内容编排、呈现方式、数学史四个方面进行对比;在习题上,从数量和综合难度进行对比.基于“实数”内容的比较,以期整合三版教材的异同点,为教材编写和优化教学提供参考.

二、三版教材中“实数”的内容对比

(一)“实数”中教材章前页的对比

人教版“实数”章前页通过介绍宇宙飞船离开地球进入轨道正常运行的速度范围(大于第一宇宙速度 $v_1^2 = gR$,而小于第二宇宙速度 $v_2^2 = gR$),探讨 v_1, v_2 如何求解的问题,从而引出平方根的概念.基于此,延伸出无理数内容,进一步将数的范围扩充至实数,同时,在章前页中,附上了火箭发射图,背景图契合问题提出.

苏科版“实数”则比较直接地表述出实数是由有

理数、无理数组成,并将数轴与实数联系起来,强调实数与数轴上的点是一一对应的关系,借助数轴工具,让学生能够更为直观地理解实数内容.同时,在章前页中,根据前面所学的勾股定理设计数学问题,要求学生通过计算,辨析哪些是有理数?哪些是无理数?能否在数轴上表示出相应数值?以问题提出的形式,启发学生思考,引入实数内容.

北师大版“实数”的章前页从两个方面引出实数:一是借助数学史来引入.其中,不仅提出古希腊的毕达哥拉斯学派的问题“所有的数量都可以用整数或者整数的比表示,该论断正确与否?”,而且附加了毕达哥拉斯的毕达哥拉斯螺旋图,充分体现了数学之美,贴合实数主题内容;二是利用数学情境的实例来阐述.你能求出面积为2的正方形的边长吗?你知道圆周率 π 的精确值吗?……它们能用整数或分数(即有理数)来表示吗?通过上述两个方面,引起学生质疑和思考,从而引出下文学习内容:无理数、实数、平方根、立方根等内容,并学会利用估算或计算器求解无理数的近似值.与其他两版不一样的是,北师大版在章前页中,加入了学习目标板块,别具特色,这就为教师的“教”和学生的“学”,明确了实数内容的学习目标和方向.

综上所述,人教版和北师大版在章前页上,重视情境问题的创设,尤其是以跨学科知识、数学史为背景,不仅贴合课标要求,而且为引出实数内容做好衔接,帮助学生深化实数内容的理解,启发学生思考,让



人印象深刻,起到抛砖引玉的作用.而苏科版则借助勾股定理设计问题,起到了温故知新、承上启下的作用.三版教材的章前页设计各具特色,值得深入探析.

(二)“实数”中内容编排的对比

通过对三版教材实数章节进行分析,得出其编排情况,如表1所示.由表可知,三版教材呈现出异同点.其共同点是:三版教材编排顺序都是从平方根→立方根→实数,这符合学生的认知发展水平,便于学生的理解.不同点在于:一是,安排的学段不一致,人教版实数内容安排在七年级下册,放在相交线与平行线之后,而苏科版和北师大版都安排在八年级上册,苏科版放在全等三角形、轴对称图形和勾股定理之后,北师大版放在勾股定理之后;二是,编排的节数不同,人教版只有三节,苏科版有四节,而北师大版则有七节;三是,在内容排布上,一方面,对于近似数和利用计算器开方,北师大版和苏科版单独设立一节介绍,而人教版是将其分别融入平方根和立方根两节内容中.另一方面,人教版和北师大版都是先给出算术平方根的概念,再给出平方根的概念,而苏科版则是先得出平方根的概念,再给出算术平方根的概念,三版教材在平方根内容编排逻辑顺序上,有所差异.

(三)“实数”中呈现方式的对比

从前文可知,平方根、立方根和实数内容作为三版实数章节的共同部分,不仅是实数章节的重点,而且三者之间彼此联系.因此,下面以这三节内容作为代表进行对比分析.

在平方根内容上,人教版先是提出问题“美术比赛中,面积为 25dm^2 的正方形画布,如何求作品其边长?”该问题实则是已知一个正数的平方,求这个正数的问题.以此,提出算术平方根概念,进而在后面顺

其自然的引出平方根概念.苏科版则以前面所学的勾股定理来设计题目,启发学生思考“ $x^2 = a$ 时, x 是什么数?”的问题,进而引出平方根的概念.北师大版基于勾股定理设计问题,要求学生辨析问题中 x, y, z, w 那些是有理数?那些是无理数?从而提出算术平方根的概念,并在后文引出平方根的概念.

在立方根内容上,三版教材在概念引入上相似,只不过问题的情境不一样,三版教材分别以包装箱、植物细胞、储气罐等实际例子,设计情境问题,通过类比平方根的概念,进而得出立方根的概念.因此,在立方根内容上,三版的呈现方式差别不大.

在实数这一节内容,人教版通过探究“我们知道有理数包括整数和分数,请把下列分数写成小数的形式,你有什么发现?”让学生经历自主探究,得出任何有理数均可写成有限小数或无限循环小数的形式,反过来,任何有限小数或无限循环小数也都是有理数.根据前文的学习,明确很多数的平方根和立方根都是无限不循环小数,故无限不循环小数称为无理数.从有理数化小数问题导入无理数定义,能够让学生感受知识概念生成的过程,培养学生分析问题和解决问题的能力.苏科版则基于前面学习的勾股定理,设计相关几何试题,并提出如何画出“长度为 $\sqrt{10}\text{cm}$ 、 $\sqrt{13}\text{cm}$ 、 $\sqrt{29}\text{cm}$...的线段”“如何画半径为 1cm 的圆,并计算其周长和面积”.引出像 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{10}$ 、 π 、 2π ...等,都是无理数.并利用 $\sqrt{3}$ 举例说明无限不循环小数是无理数.北师大版在第一节认识无理数中,先是让学生估计面积为 5 的正方形的边长和体积为 2 的正方体棱长,并利用计算器进行验证,得出二者的边长和棱长均为无限不循环小数.同时,在接

表1 三版教材“实数”章节的内容编排

位置及章名	人教版	苏科版	北师大版
	七年级下册(第六章 实数)	八年级上册(第四章 实数)	八年级上册(第二章 实数)
节名	6.1 平方根		1. 认识无理数
	6.2 立方根	4.1 平方根	2. 平方根
	6.3 实数	4.2 立方根	3. 立方根
	阅读与思考 为什么 $\sqrt{2}$ 不是有理数	4.3 实数	4. 估算
	数学活动	4.4 近似数	5. 用计算器开方
	小结	数学活动 有关“实数”的课题探究	6. 实数
	复习题6		7. 二次根式
			回顾与思考
			复习题

下来的学习中,借助有理化小数问题导出无理数定义.

(四)“实数”内容在数学史的对比

数学史作为数学文化的重要组成部分,近年来,在数学教育界掀起了一股数学史融入数学教学的研究热潮.基于数学史设计教学,一方面,能够让学生了解数学知识演变,诠释数学之美、文化之魅力,而且有助于提升学生学习兴趣,培养学生积极探究的主动性.对此,研究对三版教材进行数学史分析,得出表2.从表中能够看出,人教版和北师大版在数学史的开发上,以比较直接的形式将数学史内容呈现在学生面前,而且融合的数学史内容丰富多样,阐述了“无理数”的由来,扩大了学生课外阅读的知识面.而苏科版除了“欧几里得《原本》证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数”外,另外两个则是以数学活动的方式展示,让学生自主探究和搜集相关数学史实,强调培养学生自主探究,获取信息的能力,具有一定的开放性.

表2 三版教材数学史融入的对比分析

教科书版本	数学史内容	位置
人教版	希帕索斯发现无理数 $\sqrt{2}$,引发第一次数学危机;	阅读与思考
	欧几里得《原本》证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数.	数学活动2
	华罗庚巧算立方根的故事.	
苏科版	欧几里得《原本》证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数.	4.3 阅读
	查阅书籍资料,了解人类认识无理数的简史;	
	谈谈数扩充的目的,并阐述数的扩充与数的运算的联系.	数学活动
北师大版	古希腊毕达哥拉斯学派论断、毕达哥拉斯螺旋图.	章前页
	希帕索斯发现无理数 $\sqrt{2}$,引发第一次数学危机;	
	欧几里得《原本》证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数.	读一读

三、三版教材中“实数”的习题对比

(一)习题数量的对比

三版教材在习题编排上都是以“1”“2”等数字命名,而有的题目还包含的有“(1)”“(2)”等小问,因此,为了更好地统计习题数量,将其看作一道题来计

数,分别从例题、练习题、习题和复习题四个方面进行统计,如表3所示.

表3 两个版本教材的习题数量统计

教科书版本	例题	练习题	习题	复习题	合计
人教版	9	16	31	14	70
苏科版	10	14	20	15	59
北师大版	13	20	48	26	107

由表3可知,三版教材在习题设计上,呈现出一定的差异性.在习题总数上,北师大版最多,高达107道,其次是人教版70道,最后是苏科版59道;在例题数上,三版教材差异较小,都在10道左右;在练习题和习题上,北师大版>人教版>苏科版;在复习题上,北师大版最多,为26道,苏科版与人教版差别不大,分别是15、14道.由此可见,在习题设计上,北师大版更加关注习题数量的设计,反映了其关注学生课后对教材知识的及时训练.但是从内容编排来看,习题数量多又在情理之中,与其他两版相比,北师大版实数内容章节较多.

(二)习题综合难度的对比

习题综合难度以鲍建生的综合难度模型^[2]为框架,从探究、背景、运算等五个维度来分析习题难度,每个维度又划分了几个水平,对其分别赋值,如“探究”因素下的水平,分别赋值:识记(1分)、理解(2分)、探究(3分),其余难度因素赋值以此类推.通过对三版教材习题进行分析,并利用公式 $d_i = \frac{\sum_j n_{ij} d_{ij}}{n}$ ($\sum_j n_{ij} = n, i = 1, 2, \dots, 5$)进行计算,从而得出表4中各个难度因素的数据.

表4 三版教材习题的难度因素比较

教科书版本	探究	背景	运算	推理	知识含量
人教版	1.98	1.28	2.02	1.77	1.21
苏科版	2.08	1.16	2.12	1.85	1.34
北师大版	1.93	1.29	2.08	1.72	1.37

根据表4数据,不难发现,三版教材中的探究、运算和推理因素均比较高,而且相差不大,但是背景和知识含量因素则较低.其中,三版教材的运算因素均在2.0以上,而背景因素比较低,原因在于实数内容更多地强调考查学生的运算能力核心素养,与个人、公共和科学等情境缺乏联系.在知识含量上,苏科版和北师大版都高于人教版,从上述内容编排来看,不难发现,苏科版和北师大版均在八年级上册学习实数

内容,前面已经学习了勾股定理等内容,这也使得实数在习题设计上,融入了其他相关知识点,丰富了习题类型。

四、反思及启示

(一)基于学生认知特点统筹三版教材,合理开展教学

在不同学段,学生的认知水平是不尽相同的。一方面,教材编制要遵循学生最近发展区,合理编排教材内容,帮助学生由浅入深、由易到难,循序渐进地理解教材知识。另一方面,教师要提升专业水平,深入理解教材编排的呈现方式和逻辑顺序。例如,在无理数的导入上,教师要拓展教材的阅读和探析深度,对比三版教材各自导入的特点,人教版和北师大版为何均以“有理数化小数”的实例来导入无理数概念,而苏科版则以勾股定理的相关试题来导入。教师要重点思考其缘由,结合学生认知特点优化教学。又如,在平方根的学习中,到底是先介绍算术平方根还是平方根,哪种更为贴合学生认知。其中,人教版和北师大版均是先介绍算术平方根,再引出平方根,苏科版则是截然相反。对于这种内容编排的逻辑顺序,教师要善于去发现和总结,并归纳最优的授课顺序。

(二)丰富教学手段,促进教学形式多元化

教学并非简单枯燥的。如果教师仅仅为了完成教学任务,开启满堂灌的模式进行授课,那么学生提不起兴趣,课堂不够活跃,教学氛围比较压抑。对此,教师要善于创新教学手段,通过网络、图书馆等方式,学习成熟的教学理念及模式,例如从数学史视角设计教学,数学史能够为教师提供丰富的教学素材,帮助改进教学,改善教师观和学生观,传递新概念和新思想。实数这一章蕴含着丰富的数学史内容,如希帕索斯发现无理数 $\sqrt{2}$,引发第一次数学危机、欧几里得《原本》证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数等,通过阐述该史实,能够让学生了解数学知识的演变,经历无理数从发现→探索→验证→纠错等过程,提升学生兴趣,体会数学知识的温度,数学之魅力,同时,也可以培养学生探究真理的科学精神,落实立德树人的目标。尤其是近年来,基于HPM设计教学已然演变成数学教育界的热点,这也从侧面反映了数学史与教学的深度融合在实际数学教学中是可行的,具有可操作性,而且能够极大地改善枯燥的课堂教学状况。

(三)增设背景及知识含量,优化习题难度

在习题综合难度上,三版教材在探究、运算和推

理上,下足了功夫,这与“实数”这一章的教学目标相契合。上述研究表明,习题背景考查相对缺乏。一方面,习题不仅要考查学生对算法、法则等方面的掌握程度,以便灵活构建运算程序解决问题,而且要与生活实际相关联,搭建理论与实践相结合的桥梁,通过设计丰富情境,培养学生应用能力,也可增添跨学科背景,增强学生跨学科的应用意识与实践能力,丰富学生的知识经验。另一方面,从近年考试来看,中考试卷中以生活情境、科学情境等为背景的试题较多,足以显示其重要性。同时,新课标强调了立德树人的理念,提倡五育并举,此类背景习题不仅考查学生学以致用用的能力,而且可以起到育人的作用。由此可见,增加适当的背景习题,对于落实课标要求是十分必要的。

同样地,在知识含量上,多以该节内容为主,考查学生在理解算理的基础上进行运算训练,缺乏与其他知识点的结合,这就导致了知识点考查形式较为单一,尤其是人教版,由于实数内容安排在七年级下册,与其他知识点(如勾股定理等)综合考查的机会就更少。尽管该板块的重点放在平方根、立方根等运算上,但是不可否认的是,多知识点的融合,不仅能够对学生起到温故知新的作用,而且可以增强学生综合解决问题的能力。从长远来看,多知识点考查,能够拓宽学生视野,培养学生用联系的观点看待问题,提升学生问题提出和问题解决的能力,为今后走入社会和终身学习打好基础。因此,为了尽可能地做到各因素的平衡,应该以课程标准和学生数学核心素养考查为出发点和落脚点^[3],进行内容编排和习题设计,以适应学生未来发展方向。

参考文献:

- [1]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022.
- [2]鲍建生.中英两国初中数学期望课程综合难度的比较[J].全球教育展望,2002,31(9):48-52.
- [3]杨正朝.2022年高考数学全国卷的试题分析及对比[J].中学数学教学,2022(5):64-67.

【作者简介】杨正朝,贵州凯里学院附属中学(556000),贵州师范大学数学科学学院(550025)。

【原文出处】《中学数学教学》(合肥),2023.5.6~9