

## 【教学研究】

# “方程与不等式”主题的结构化教学

柏素霞 石树伟

**【摘要】**初中阶段数与代数领域“方程与不等式”主题的教学,从宏观层面看,要关注共同的研究起源,遵守共同的研究路径,感悟融通的一般观念.从微观层面看,各章(单元)的教学应通过起始课激活研究思路,通过任务驱动或先行组织(类比迁移)展现全章面貌;通过分解课强化“四基”“四能”,充分领会数学建模思想和化简、消元、降次等化归转化思想;通过小结课再次整体建构,更加凸显内在的思想联系.

**【关键词】**初中数学;方程;不等式;结构化理解;结构化教学

《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称“新课标”)在课程理念、实施建议中强调:为了适应发展学生核心素养这一重大的课程目标变化,要对作为载体的课程(教学)内容进行结构化整合<sup>[1]</sup>,“重视对教学内容的整体分析,帮助学生建立能体现数学学科本质、对未来学习有支撑意义的结构化的数学知识体系……通过合适的主题整合教学内容,帮助学生学会用整体的、联系的、发展的眼光看问题……”<sup>[2]</sup>.因此,一线教师落实新课标理念的一个重要任务就是加强对课程内容的结构化理解,在此基础上做好结构化教学,充分发挥数学学科的育人价值.本文拟对新课标初中阶段数与代数领域“方程与不等式”主题中不同层次内容的本质及关联进行分析,以增强对该主题内容的结构化理解,进而提出结构化教学的建议.

## 一、宏观层面的结构化教学

### (一)关注共同的研究起源

方程与不等式都是实际问题中含有未知数的数量之间的大小关系的表达,是讨论数量关系的一类应用广泛的数学工具(模型).数学中最基本的数量关系是大小关系,两个数量之间的大小关系有三种:大于、等于和小于.方程(组)表达数量之间的相等关系,不等式(组)表达数量之间的不等关系,方程与不等式共同起源于实际问题中数量之间的大小关系.它们都有着悠久的历史,是基本而重要的数学概念.

基于以上分析,建议在首次引入方程或不等式概念时,采用从实际问题入手呈现数量之间大小比较不同情况的方式,如天平两端物体质量的比较,购买商品不同优惠方式的选择等.一方面,让学生感悟方程或不等式来源于实际问题中数量之间相等或不等关系的数学抽象,感悟数学与生活的联系,发展学生的抽象能力;另一方面,则让学生感知方程与不等式的联系,体会方程与不等式都是实际问题中数量之间大小关系的数学表达,感悟方程与不等式内容的整体性.

### (二)遵循共同的研究路径

新课标在课程性质中指出:“数学源于对现实世界的抽象,通过对数量和数量关系、图形和图形关系的抽象,得到数学的研究对象及其关系;基于抽象结构,通过对研究对象的符号运算、形式推理、模型构建等,形成数学的结论和方法,帮助人们认识、理解和表达现实世界的本质、关系和规律.”<sup>[3]</sup>这里清晰地阐明了数学学科的研究对象及其来源、研究过程与方法以及研究结果和作用,从宏观上指明了研究一个数学对象的基本“套路”.方程与不等式除了有共同的研究起源,还有共同的研究路径:实例—概念—性质—解法—应用.首先由生活到数学,从实例中抽象出方程或不等式模型,形成方程或不等式概念;接着是数学内部的发展,研究等式或不等式的性质,利用等式或不等式的性质解方程或不等式;最后从数学回到生

活,应用方程或不等式解决实际问题.

基于以上分析,建议每一类方程或不等式(除了一元一次方程)的章(单元)起始课,遵循著名教育心理学家奥苏伯尔提出的“为迁移而教”理念,通过先行组织者(回顾本主题已学内容的研究脉络)类比规划本章的研究路径,确定本章研究的脉络线索和框架结构,让学生“既见树木,又见森林”,增强学习的预见性.例如,教学《一元一次不等式》这一章,在前面已经学过有关方程(组)内容的基础上,学生已经对方程有一定的认识,会用方程表示问题情境中的等量关系,会解一元一次方程和二元一次方程组.所以,可以充分发挥学习心理学中正向迁移的积极作用,引导学生借助已有的认识和经验,进行类比和迁移,为进一步学习不等式(组)提供一条合理的学习路径.

### (三)感悟融通的一般观念

著名教育心理学家布鲁纳非常重视学科结构的教学.为此,他首先强调学习一般观念.<sup>[4]</sup>一般观念也称大观念、核心观念,即迁移力强、适用范围广、指导作用大的思想和理念,也可以理解为我们常说的一定领域内知识发生、发展的根本指导思想.一般观念是有层次的.“方程与不等式”主题具有的相互融通的一般观念是:用字母表示的未知量可以与已知量一起参与列式和运算,列出并求解方程或不等式.即用字母表示未知量后,未知量可以与已知量一起根据问题中的数量关系参与列式,形成方程或不等式;可以与已知量一起根据等式或不等式的性质参与运算,通过变形求得未知量的值或范围.过去,用算术方法求未知量,需要由已知量逆向列式表示未知量并计算.因此,用字母表示未知量是一个思想的飞跃,未知量参与列式和运算的过程是一个顺向思考的过程,体现了方程或不等式解决问题较算术方法的优越性,其中蕴含着模型观念和化归转化的数学思想方法.

基于以上分析,建议“方程与不等式”各章的教学,特别是起点章——《一元一次方程》和《一元一次不等式》的教学,通过实际问题代数方法与算术方法的比较,让学生体会方程与不等式解决实际问题的优越性——这其实也是新课标将方程内容全部放在初中教学的重要用意之一<sup>[5]</sup>.每一类方程或不等式每一种解法的教学,都要强化一以贯之的思想联系:

解方程或不等式的过程是化复杂为简单、化陌生为熟悉的过程,依据等式或不等式的性质,使方程或不等式逐步地变形、化简为“ $x = a$ ”或“ $x > a$ ”“ $x < a$ ”的形式.每一类方程或不等式的教学,都要让学生亲历数学建模的全过程,感悟模型观念和化归转化思想.

## 二、微观层面的结构化教学

布鲁纳还指出,学习结构就是学习“事物是怎样相互关联的”<sup>[6]</sup>.其实,宏观层面的结构化教学更关注具有一致性的知识本质(或者说“通性通法”),而微观层面的结构化教学更关注逻辑性(有序性)的知识关联.从宏观到微观(从整体到局部),教材对课程内容分章节螺旋上升式的编排是实现结构化教学的具体抓手和重要保障.下面就基于苏科版初中数学教材的编排,对“方程与不等式”主题的结构化教学进行微观层面的分析.

### (一)“一元一次方程”的教学

一元一次方程是最简单的代数方程.该内容是教材编排的“方程与不等式”章节链条的起点、知识体系的开始,因而是规划该主题教学的关键.在主题教学的起始课中,教师要种下“元”和“次”的种子,后继就不用方程概念上耗力太多,可直奔方程的核心,指向数学核心素养与思想方法.

遵循“方程与不等式”主题研究的一般脉络和线索,《一元一次方程》一章分为《从问题到方程》《解一元一次方程》《用一元一次方程解决问题》三节.具体地,从问题情境出发,引出方程概念,再从一般到特殊,引出一元一次方程概念.方程是特殊的等式,为了给解方程做好知识准备,接着学习等式的性质,然后运用等式的性质解一元一次方程,在此过程中遵循从简单到复杂循序渐进的规律,按照移项、合并同类项、去括号、去分母的顺序逐渐增加方程的复杂程度,关注化归转化思想方法的指导.一元一次方程的应用按照加减、倍分等等量关系设置例题和习题,让学生逐步熟悉由实际问题抽象出方程模型的过程与方法,感悟用一元一次方程解决问题的数学建模基本步骤.

基于以上分析,建议本章起始课的教学,从学生已有知识、经验出发,让学生经历用多种方法解决实际问题的过程,帮助学生突破算术和方程两种方法之间的认知障碍,引导学生感悟方程是比算术更有力的

数学工具. 由于本章是“方程与不等式”主题的起始, 没有可供类比的对象, 因此, 建议由大任务驱动来规划单元学习路径. 大任务驱动可以成为落实教学内容结构化的重要策略, 与传统的课时学习任务相比, 它具有更大的探究空间, 能让学生不断探寻知识的本质. 例如, 可将“鸡兔同笼”问题设计为一次方程(包括一元一次方程和二元一次方程组)学习的大任务, 引导学生尝试研究其中的等量关系, 通过等量关系的符号化引出方程, 从中感悟算术方法技巧性太强、方程思路具有优越性, 后续自然地引出解方程、用方程解决问题.

在《解一元一次方程》的教学中, 需注重上联和下延, 让学生在结构联系中学习每一个新知. 如对每课时欲求解的“新方程”, 都要引导学生分析与上一课求解的“旧方程”的异同, 启发学生通过一定的等式变形, 把“新方程”转化为已经会解的“旧方程”, 渗透化归思想, 揭示数学内部的发展规律.

《用一元一次方程解决问题》的教学, 应注重让学生经历相应的数学建模全过程, 从而浓缩重演本章的学习历程. 用一元一次方程解决问题的关键是寻找等量关系, 应注意让学生体会实际问题中常见的加减、倍分等类型的相等关系, 感受现实世界内在的规律性和反映至数学内部的整体性.

### (二)“二元一次方程组”的教学

二元一次方程组与一元一次方程相比, 有了“元”的增加. 对该内容, 教材仍然由实例引出一元一次方程(组)概念; 然后, 教学解二元一次方程组, 其中无论代入消元还是加减消元, 都是在化归转化思想的指导下将“二元”转化为“一元”. 之后的二元一次方程组的应用其实是一些一元一次方程应用问题在思维上的简化, 即通过添加一个“元”, 增加思维宽度, 减少思维深度. 教材不关注题型的分类, 如常见的和差倍分问题、行程问题、配套问题等, 而关注建模过程的经历, 特别是数量关系的梳理, 着重介绍了用列表和线段图分析数量关系的方法, 且无论哪种方法, 都先“领”后“放”, 即从方法的具体示范到让学生自主分析, 发展学生的模型观念和几何直观素养.

基于以上分析, 建议本章教学秉持“整体立意, 前后连贯”的原则, 加强与“一元一次方程”内容的联

系. 在章起始课中, 应贯通两章内容, 引导学生类比一元一次方程的学习规划本章的学习路径. 后续内容的教学要以一般观念及其反映的基本思想方法为纽带, 加强两章之间的纵向联系, 使两章内容相互沟通, 从而加深对主题内容的整体性认识, 帮助学生建立功能优良、迁移力强的数学认识结构, 体会数学的思维方式. 具体地, 本章起始课的教学仍可将“鸡兔同笼”问题设计为大任务, 通过一元方程方法和二元方程组方法的比较, 让学生体会二元方程组方法思维的直接、顺畅; “解二元一次方程组”的教学, 可通过一元一次方程和二元一次方程组的比较, 在化归转化思想的指导下, 让学生自主探索发现代入消元法和加减消元法, 认识两种方法之间的联系; “二元一次方程组的应用”的教学, 则可在模型观念的指导下, 引导学生类比一元一次方程的应用, 重温数学建模历程.

### (三)“分式方程”的教学

教材中, “分式方程”部分主要讨论分式方程的概念和解法, 通过利用分式方程解决实际问题, 让学生了解分式方程具有整式方程不可替代的特殊作用, 更适合作为某些类型实际问题的数学模型. 分式方程也是相等关系的表达, 因此, 分式方程模型建构、方程求解的过程与整式方程类似.

基于以上分析, “分式方程”的教学, 应充分利用学生已有的方程学习的基础, 加强基本活动经验和已有一般观念的运用. 教学中, 要一以贯之地强调相等关系的重要性, 可以借助表格、示意图多角度引导学生分析相等关系, 然后依据相等关系构造方程, 使学生逐步领会数学建模思想; 还要一以贯之地突出化归转化思想在解分式方程中的重要性, 化分式方程为整式方程, 让学生体会解法思路是自然的、合理的, 提高对新知与旧知之间联系的认识, 提升构建知识体系的能力.

### (四)“一元二次方程”的教学

“一元二次方程”是初中阶段方程学习的压轴内容. 一元二次方程相较于一元一次方程, 在“次”上有了一个跃进, 从而能够刻画许多一次方程不能反映的数量之间的相等关系, 解决更多的实际问题. 与已经学过的方程类似, 其学习路径仍为“实例—概念—解法—应用”. 一元二次方程的解法仍以化归转化思想

为指导,通过降次转化为一元一次方程求解.开平方降次是通法,包括直接开平方法、配方法、公式法,其中体现了从特殊到一般、从具体到抽象的研究思路,进而由一般化的求根公式可得一元二次方程根的判别式、根与系数的关系.而因式分解降次具有一定的特殊性和灵活性.一元二次方程的应用再次体现数学建模的基本历程,数学模型的建立关键在于“二次”的形成.数量之间的相等关系主要有乘法模型(如“单价 $\times$ 销量=总额”等)、几何模型(如直角三角形三边关系等)、指数模型(如增长率问题等),这些数量关系“形散而神聚”,都指向“二次”.

基于以上分析,建议本章起始课的教学除了类比规划学习路径之外,还可将消元、降次进行综合讨论,让学生对高次方程与多元方程的求解方法形成整体性认识.一元二次方程的前三种解法脉息相通,只是所解方程的复杂程度在逐步增加,教学时应注意让学生学会把“新方程”转化为已会的“旧方程”,感悟化归转化思想.此外,在解法的探究过程中,要让生理理解四种解法同根同源、内在联通,体会其统一之美.在从特殊到一般解一元二次方程的操练过程中,逐步形成对求根公式、根的判别式、韦达定理等知识要点的正确理解.而“一元二次方程的应用”的教学,应适时引导学生总结实际问题中可以建立一元二次方程的数量关系的特征,感悟它们的数学本质及内在联系;应通过实际问题的解决让学生明晰数学建模的基本思路.

#### (五)“一元一次不等式(组)”的教学

“一元一次不等式(组)”一般设置在“一元一次方程”后,从相等到不等符合学生的认知规律.由于不等式解决的是含有不等关系的问题,与之前讨论的相等关系既有联系又有区别,所以,本章教学面临如何通过比较新旧知识使学生的学习取得新突破的问题.教材由生活实例引出不等式的概念,再从一般到特殊,归纳得出一元一次不等式的概念,这是本章的基本概念.后续学习不等式的基本性质,是为解不等式(组)做准备.接着,学习解一元一次不等式及解集的几何表示,是为应用做准备.最后,利用一元一次不等式解决实际问题,是本章的重点,也是教学的难点.本章重视数学与生活的联系,需在列不等式和解不等

式的过程中进一步落实建模思想和化归转化思想的指导.

基于以上分析,不难发现本章研究线索与《一元一次方程》一章类似,因此类比教学仍是本章教学的不二之选,包括概念、性质、解法、应用的教学都应加强与一元一次方程的类比.本章起始课在教学基本概念后,应类比一元一次方程的学习规划一元一次不等式的学习路径.概念及应用的教学,应重视数学与生活的联系,让学生经历利用不等式将实际问题转化为数学问题的过程,发展抽象能力和模型观念.解法的教学,不仅要在方法、步骤上加强与一元一次方程的联系,更要在指导思想(化归转化)上加强融通,让学生感悟方程与不等式内在的统一性.

总之,“方程与不等式”主题各章的教学,应通过起始课激活研究思路,通过任务驱动或先行组织(类比迁移)展现全章面貌;通过分解课强化“四基”“四能”,充分领会数学建模思想和化简、消元、降次等化归转化思想;通过小结课再次整体建构,更加凸显内在的思想联系.

#### 参考文献:

- [1][2][3]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022:3,85,1.  
 [4][6]布鲁纳.布鲁纳教育论著选[M].邵瑞珍,张渭城,等译.北京:人民教育出版社,2022:31,23.  
 [5]史宁中.数学课程标准修订与核心素养[J].教育研究与评论,2022(5):27.

【作者简介】柏素霞,扬州大学附属中学东部分校(225000);石树伟,江苏省扬州市广陵区教师发展中心(225000).

【原文出处】《教育研究与评论》:中学教育教学版(南京),2023.8.41~45

【基金项目】本文系江苏省教育科学“十四五”规划立项课题“基于苏科版教材的初中数学学科育人实践研究”(编号:D/2021/02/613)以及江苏省初中数学名师工作室“用好课标教材,落实数学育人”专项研修的阶段性研究成果.