例谈三角函数最值问题的求解方法

林运来

【摘　要】与三角函数有关的最值问题或取值范围问题是三角函数中常考的一类基本题型,有些同学对此类问题常常会觉得无从下手.文章举例说明求解此类问题的几种行之有效的方法——配方法、换元法、导数法、数形结合法、反解法、判别式法、利用辅助角公式法、利用基本不等式法等解决问题.

【关键词】三角函数;最值问题;求解

三角函数是高中数学学习中的重要内容之一,也是历年高考必考的内容.在三角函数的学习过程中,我们经常会遇到求解最值问题或取值范围问题,其类型多,解法灵活,技巧性强,是高中数学知识中的一个难点.笔者通过对高中阶段常见的与三角函数有关的最值问题或取值范围问题的求解方法的分析,并对解法中蕴含的基础知识和基本方法进行解析,以期对提高同学们的解题技能和解题技巧有所助力,进而重点在逻辑推理、直观想象、数学运算和数学建模等素养上得到提升.

一、配方法

例1　已知函数$f(x)=2\sin x+\cos 2x$,求$f(x)$的最大值.

解析　因为$f(x)=2\sin x+\cos 2x=-2\sin^2 x+2\sin x+1=-2\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$.

又因为$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$,所以当$\sin x=\dfrac{1}{2}$时,$f(x)$取最大值$\dfrac{3}{2}$.

点评　根据倍角公式,得到$\cos 2x$与$\sin x$(或$\cos x$)的平方关系,把问题转化为“二次函数在闭区间上的最值问题”,利用配方法,使问题获解.在利用二次函数求最值时要注意正弦函数、余弦函数自身的取值范围.

二、换元法

例2　已知函数$f(x)=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$,求$f(x)$的值域.

解析　设$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,则$-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$,且$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

所以$f(x)=\dfrac{t^2-1}{2}+t=\dfrac{1}{2}(t+1)^2-1$,所以当$t=-1$时,$f(x)$取最小值$-1$,

当$t=\sqrt{2}$时,$f(x)$取最大值$\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$.

所以$f(x)$的值域为$\left[-1,\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\right]$.

点评　通过换元,使题设中“隐藏”的平方关系得以凸显,进而把“复杂”的函数转化为熟悉的函数,进一步利用配方法使问题快速、简捷获解.这种“曲径通幽”的方法充分彰显了“化繁为简”的优点.

三、导数法

例3　已知函数$f(x)=2\sin x+\sin 2x$,求$f(x)$的最小值.

解析　因为$f(x)$的最小正周期为2π,所以只需考虑$f(x)$在$[0,2\pi)$上的最小值即可.

$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2(2\cos^2 x+\cos x-1)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$.

令$f'(x)=0$,得$\cos x=\dfrac{1}{2}$,或$\cos x=-1$,即$x=\dfrac{\pi}{3}$,或$x=\dfrac{5\pi}{3}$,或$x=\pi$.

因为$f(0)=0$,$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,$f(\pi)=0$,$f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,所以$f(x)$的最小值为$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

点评　本题在求解时,借助导数等工具判断函数性质,并通过比较函数的极值得出函数的最小值.

需要指出的是,例3与例1“形同质异”,求解时要注意辨析.

四、数形结合法

例4 求函数$f(x)=\dfrac{3-\sin x}{2+\cos x}$的值域.

解析 因为$f(x)=\dfrac{3-\sin x}{2+\cos x}=\dfrac{3-\sin x}{2-(-\cos x)}$.

在平面直角坐标系 xOy 中,设 $A(2,3)$, $P(-\cos x,\sin x)$,则点 P 是单位圆 $O:x^2+y^2=1$ 上的动点,且$f(x)=k_{PA}$. 由图1可知,当直线 PA 与圆 O 相切时,k_{PA}取最值. 设直线 PA 的方程为 $y-3=k(x-2)$,即 $kx-y+3-2k=0$.

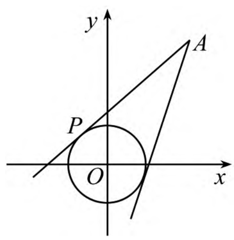

图1

由$\dfrac{|3-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得 $k=2\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 所以$f(x)$的值域为$\left[2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

点评 本题通过图形的形式直观地呈现问题的条件与目标,并借助几何直观呈现问题的本质与内在联系,使解题过程“跨越思维障碍”,化抽象为具体,利用代数方法最终实现解题目标,从中我们可以进一步感受数形结合思想的奇妙.

五、反解法

所谓“正难则反”,就是指在某些函数的最值(或值域)直接不好求的情形下,可以通过求其反函数的定义域的方法进行求解. 利用反解法求函数的最值(或值域)的解题步骤如下:

1. 求已知函数的反函数;

2. 求反函数的定义域;

3. 根据反函数的定义域就是原函数的值域这一关系即可求出原函数的最值(或值域).

例5 函数$f(x)=\dfrac{3-2\sin x}{2+\cos x}$的值域.

解析 设 $y=\dfrac{3-2\sin x}{2+\cos x}$,则 $2\sin x+y\cos x=3-2y$,即 $\sqrt{y^2+4}\sin(x+\varphi)=3-2y$,其中 $\tan\varphi=\dfrac{y}{2}$.

所以 $\sin(x+\varphi)=\dfrac{3-2y}{\sqrt{y^2+4}}$.

因为$|\sin(x+\varphi)|\leqslant 1$,所以$\dfrac{|3-2y|}{\sqrt{y^2+4}}\leqslant 1$,解得 $2-\dfrac{\sqrt{21}}{3}\leqslant y\leqslant 2+\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

所以$f(x)$的值域是$\left[2-\dfrac{\sqrt{21}}{3},2+\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right]$.

点评 本题的求解过程并没有直接求出原函数的反函数,而是利用“反解法”的思想,根据已知条件反解得出 $\sin(x+\varphi)=g(y)$,结合三角函数的有界性建立关于 y 的不等式,然后通过解不等式得出 y 的取值范围,从而快速解决问题.

六、判别式法

例6 已知$\triangle ABC$的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 若 $b=\sqrt{3}$,且 $a=\sqrt{3}\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$.

(1)求 B;

(2)求 $2a+c$ 的最大值.

解析 (1)由已知,得 $a=b\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$,

由正弦定理,得 $\sin A=\sin B\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$.

因为 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,所以 $\cos B\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B\sin C$,因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $\sin C\neq 0$,所以 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B$,即 $\tan B=\sqrt{3}$.

由于 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)由(1)及余弦定理,得$(\sqrt{3})^2=a^2+c^2-2ac\cos\dfrac{\pi}{3}$,即 $a^2+c^2-ac=3$.(*)

设$2a+c=t>0$,则 $c=t-2a$,代入(*)式,得 $a^2+(t-2a)^2-a(t-2a)=3$,所以 $7a^2-5ta+t^2-3=0$.

所以$\Delta=(-5t)^2-4\times 7(t^2-3)\geqslant 0$,解得 $0<t\leqslant 2\sqrt{7}$.

当 $t=2\sqrt{7}$时,$a=\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$,$c=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$,符合题意.

所以 $2a+c$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$.

点评 求解第(2)问的关键在于通过换元,构造出一元二次方程,根据方程有解的条件求解不等式,使问题简捷获解. 本题在求解过程中展示的化归思

想值得我们学习.

七、利用辅助角公式

例7 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.若$b=\sqrt{3}$,且$B=\frac{\pi}{3}$.

(1)求$\triangle ABC$的周长的最大值;

(2)求$\triangle ABC$的面积的最大值.

解析 由正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$,所以$a=2\sin A$,$c=2\sin C$,且$A+C=\frac{2\pi}{3}$.

(1)因为$a+c=2\sin A+2\sin C=2\sin A+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=2\sin A+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)=3\sin A+\sqrt{3}\cos A=2\sqrt{3}\sin(A+\frac{\pi}{6})$.

当$A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即$A=\frac{\pi}{3}$时,$a+c$取最大值$2\sqrt{3}$.

所以$\triangle ABC$的周长的最大值为$3\sqrt{3}$.

(2)因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\cdot 2\sin A\cdot 2\sin C\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\sin A\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

当$2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即$A=\frac{\pi}{3}$时,$S_{\triangle ABC}$取最大值$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

点评 辅助角公式的主要作用就是利用和(差)角公式,将函数$y=a\sin x+b\cos x$(其中a,b是常数,且$ab\neq 0$)转化为$y=A\sin(x+\varphi)$或$y=A\cos(x+\varphi)$的形式,俗称“化合为一”,进而可以求解有关函数的单调性、奇偶性、最值等问题.

八、利用基本不等式

例8 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,若$\frac{a}{b}=\frac{\sin B+\sqrt{3}\cos B}{\sin A+\sqrt{3}\cos A}$,且$A\neq B$.

(1)求C;

(2)若角C的平分线交AB于点D,且$CD=2\sqrt{3}$,求$a+2b$的最小值.

解 (1)$C=\frac{\pi}{3}$(过程略);

(2)若角C的平分线交AB于点D,则$\angle ACD=\angle BCD=\frac{\pi}{6}$.

因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$,

所以$\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\angle ACB=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD+\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin\angle BCD$,即$\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}b\cdot 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\cdot 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$,整理得$\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=1$,则$a+2b=(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)=\frac{4b}{a}+\frac{2a}{b}+6\geqslant 2\sqrt{\frac{4b}{a}\times\frac{2a}{b}}+6=4\sqrt{2}+6$,当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{2a}{b}$,即$a=\sqrt{2}b=2(\sqrt{2}+1)$时,等号成立,故$a+2b$的最小值为$4\sqrt{2}+6$.

点评 求解第(2)问时,根据三角形的面积关系,得出a,b满足的等量关系,再利用常值换元,为进一步利用基本不等式解题创造了条件,对问题的顺利解答起到事半功倍的作用.

九、小结

与三角函数有关的最值问题或取值范围问题,形式多种多样,因此也就可以用多种不同的、行之有效的方法求解.上述几例均可用其他方法求解,请大家不妨试一试,以开阔解题思路,培养思维品质[1].新高考数学特别强调基础性考查,注重方法的普适性[2],因此,同学们在学习的过程中,既要注重对于基本知识、概念、原理等的深入理解、掌握与运用,不断完善认知结构,形成整体性知识体系,也要注意总结各种不同类型问题的求解策略和方法,不断提升分析问题和解决问题的能力,发展数学思维,方能在答题中游刃有余.

参考文献:

[1]华腾飞.例谈轨迹方程的求解方法[J].中学数学杂志,2022(3):18-22.

[2]赵轩,任子朝,翟嘉祺.落实双减要求,深化基础性考查——2022年新高考函数试题分析[J].数学通报,2022(9):7-10.

【作者简介】林运来(1975-),男,贵州贵阳人,福建省厦门大学附属实验中学正高级教师,中国数学会奥林匹克高级教练,福建省数学学科带头人,研究方向为中学数学教学(363123).

【原文出处】《中学数学杂志》(曲阜),2023.11.44~46