

日本小学数学教材中几何作图内容的特征与启示

——以启林馆版教材为例

郭贝贝 仲晓倩 杨新羽 杨慧娟

【摘要】日本小学数学启林馆版教材中关于几何作图的内容起步较早,且内容丰富。基于对其编排、内容选取与呈现特征的分析,我国小学数学教材中几何作图内容的编写与教学应注意以尺规作图为契机,在小学加强几何作图;注重作图方法多样化;提倡小学生使用多种工具作图;注重作图步骤,培养学生推理能力;利用几何作图,做好小学和初中几何课程的衔接。

【关键词】日本小学数学教材;几何作图;特征与启示

作图是数学思想的一种表征形式,也是用图形这种数学语言表达现实世界的一种方式。我国《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称“2022年版课标”)在小学阶段对作图给予了新的重视,首次提出了“用直尺和圆规作图”,但是目前教材中的尺规作图内容并不多,更多的是几何作图。

本文中所述的几何作图包含尺规作图,是指使用刻度尺、直尺(本文中提到的直尺均为无刻度直尺)、量角器、圆规等作图工具,绘制与几何知识相关的图形,即在尺规作图的基础上,可以有量的参与,包括长度和角度等。例如,2022年版课标在第二学段的“学业要求”中指出:“能用直尺和量角器画出指定度数的角;会用三角板画 30° 、 45° 、 60° 、 90° 的角。”这也提醒教材编写者要考虑相应的内容如何编写。那么新的理念下,我们该如何重新认识几何作图呢?不同国家小学数学教材中的几何作图内容不太一样,翻阅日本启林馆版教材,发现其中的几何作图与我国当下教材中的内容相比,有很大的不同,颇有研究的价值。因此,我们选取日本启林馆最新版小学数学教材一到六年级共9册(一、五、六年级各1册,其他年级各2册),采用文本分析和数据统计的方法,对其中的几何作图进行统计和分析,发现其内容编排、选取与呈现的特征,以期为我国小学数学教材中

几何作图内容的编写与教学提供借鉴与参考。

一、启林馆版教材的特征

(一)整体编排特征

启林馆版教材中,几何作图共13处(习题除外),分布较为平均,除一年级外各年级均涉及作图要求,其中二年级2处,三年级2处,四年级4处,五年级3处,六年级2处(详见下页表1)。

由表1可以看出,启林馆版教材中的几何作图起步较早,整体内容较多,分布于二年级到六年级,从作线、三角形、长方形与正方形、圆、角、平行四边形与菱形等到作全等图形、缩放图形,可以说涵盖了我国小学阶段的所有平面图形,且涉及了初中几何的知识,足见对几何作图的重视。对于作图工具,并不局限于直尺与圆规,刻度尺、量角器、方格纸等都是学生进行几何作图时可以使用的工具。

(二)内容选取与呈现特征

1. 注重介绍工具的功能和使用方法

对于操作性知识,工具的使用方法很重要,启林馆版教材重视工具的功能与使用方法的介绍。例如,三年级下册“圆与球”单元中,对于圆规的使用方法,教材上分步骤进行了详细介绍。学习画圆之后,专门有一节圆规的使用课,即讲授利用圆规除了可以画圆,还可以记录线段的长度,并给出情境,让学生在情

表 1

册别	单元及标题	主要作图内容	所用工具
二上	4 长	作规定长度的线段	刻度尺
二下	12 三角形和四边形	介绍三角板,在方格纸上作规定长度的长方形、正方形、直角三角形	直尺、方格纸
三下	11 圆与球	用圆规画圆,用圆规记录长度	圆规、刻度尺、方格纸
三下	17 三角形	用圆规作规定腰长的等腰三角形、规定边长的等边三角形	圆规、刻度尺
四上	1 角及其大小	作度数一定的角,作固定角的大小的三角形	量角器、直尺、刻度尺
	5 垂直、平行与四边形	过直线外一点作已知直线的垂线和平行线,作规定的长方形,作规定的平行四边形	三角板、圆规、刻度尺
四下	10 面积	作规定面积的图形	方格纸、直尺
	16 长方体与正方体	在方格纸上作长方体和正方体的平面示意图,作正方体的展开图	方格纸、直尺、刻度尺
五	6 全等图形	作出与已有图形全等的图形,作全等三角形、四边形	方格纸、直尺、刻度尺、量角器、圆规
	14 正多边形	作正六边形	圆规、直尺
	16 棱柱和圆柱	作棱柱或圆柱的平面示意图和展开图	方格纸、圆规、刻度尺
六	1 对称图形	作图形的轴对称图形和中心对称图形	方格纸、直尺
	10 图形的放大和缩小	作图形的缩放图	方格纸、圆规、直尺、量角器册别

注:启林馆版教材以年级为单位进行单元序号编排。

境中使用圆规记录长度、比较长度。最后的学习总结中,还有提示“当我知道圆规不仅可以画圆,还可以测量长度时,我觉得它是一个很方便的工具”。

除此之外,对于圆规的使用方法,教材上还在这部分内容的旁边附加了二维码,扫二维码就可以看到使用视频,视频和教材中都给出了左手和右手使用圆规的情形,体现了教材设计者的人文关怀。关于其他基本工具的使用、基本图形如线段的画法,启林馆版教材都有相应的电子资源,供学生学习时参考。

2. 注重利用多种方法完成几何作图

很多几何作图任务的完成不止一种方法,启林馆版教材非常注重利用多种途径、多种方法完成几何作图。

例如,四年级上册第5单元“垂直、平行与四边形”中,在第6节给出任务:在作出一角及角的两边,即确定了三个顶点的基础上,如何确定第四个顶点,从而作出平行四边形?教材上呈现了两种方法:其一,使用一对三角板分别作已知角的两边的平行线,这两条线的交点就是第四个顶点,依次连接四个顶点即可得平行四边形;其二,使用圆规截取已知两边的边长,以相应定点为圆心分别作弧,找到交点,即找到第四个顶点,依次连接四个顶点即可得平行四边形。这两种方法使用了不同的工具,呈现出两种思路:一是利用平行四边形的对边平行,二是利用平行四边形的对边相等,这也是引导学生学习的平行四边形的性质(特征)。

教材中将作图与图形的性质相关联,不同的作图思路体现了学生对图形性质的理解和应用的不同方面,学生调动已有知识,选择工具,在动脑、动手的过程中完成任务,不仅提高了发散思维能力,也加深了对作图工具的认识。

3. 作图步骤详细

对小学生来说,几何作图步骤非常重要,作图步骤体现的是思维过程,步骤不同,则思维过程不同,呈现详细的作图步骤,体现了教材的严谨性。启林馆版教材中都呈现了详细的作图步骤,并用箭头示意下一步。如下页图1所示,要过直线外一点作已知直线的垂线和平行线,教材上分别通过四幅图(对应四个步骤)呈现了如何利用一幅三角板来作出符合条件的直线。除此之外,为了作图的清晰、条理,分别对两个三角板标注了①号和②号,这样学生就能比较清楚地看到哪个三角板不动,哪个三角板在运动及怎么运动。

详细的作图步骤不仅给学生示范了几何作图的

规范性,而且引导学生一步步地思考其中的道理,这对于培养学生思维的严谨性,发展学生的推理能力、逻辑思维能力、空间想象能力都非常有意义。

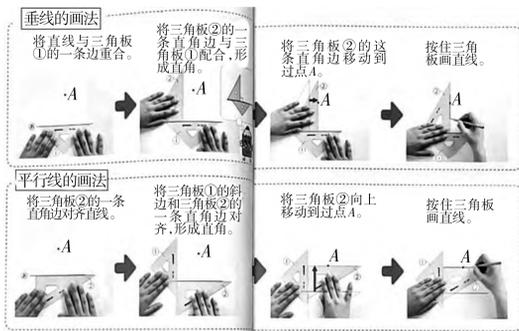


图1 用三角板作已知直线的平行线和垂线

4. 通过深度任务,循序渐进发展学生思维

启林馆版教材注重在小学中、高年级设置有深度的几何作图任务,发展学生的数学思维。例如,在三年级学习了作等腰三角形及等边三角形后,教材上给出“用两个半径相等的圆构造一个等边三角形,让学生说说理由”的内容。再如,在五年级作全等三角形时,教材上给出多种方法,最后通过“用同样的方法可以画出全等的四边形”引导学生进行深入研究。

二、启示

启林馆版教材中的几何作图内容的分析,对我国小学数学教材中几何作图内容的编写与教学有以下几点启示。

(一)以尺规作图为契机,在小学加强几何作图

提到几何作图,大家自然会想到尺规作图,从古希腊欧几里得的《几何原本》开始,尺规作图就彰显了它的独特价值与魅力。多位学者论述过在小学阶段增加尺规作图内容的重要价值。例如,马云鹏等学者认为尺规作图可以“让学生感悟数学的严谨性,还有助于学生形成几何直观”^[1]。但是小学阶段的尺规作图数量有限,稍微复杂的尺规作图需要学生的逻辑思维发展到一定阶段且具备相关的几何知识,这也是尺规作图以前均放在初中的主要原因。吴正宪老师认为小学数学中的尺规作图“重点不是把尺规作图当作一个知识点教会学生作图,而是要引导学生亲身经历动手操作的过程……”^[1]故当前可以以尺规作图为契机,加强小学数学教材中的几何作图,多一点几何作图,让学生多作多思,在动手、动脑中学习几何,看到数学丰富多彩的一面,在作图中培养

学生数学学习的兴趣,进而发展推理能力、几何直观与空间想象能力。

(二)提倡小学生使用多种工具作图

作图的方法决定于作图工具的选择^[2]。章飞认为,在初中数学几何作图教学中应倡导灵活选用工具作图,限用尺规不符合教学实际^[3]。所以,对小学生而言,除了有限的尺规作图,还可以设计更多的几何作图。在几何作图中,提倡学生使用三角板、量角器等作图工具。工具的选择在作图中体现了学生对几何知识的理解,在信息化社会体现的也是一种非常重要的素养,所以除了直尺和圆规,教材或教学中应提倡小学生选择或使用多种工具,设计开放的几何作图问题,发展学生的多种素养。

工具的操作方法、使用场合等都会对几何作图产生一定的影响。例如,当学生不会用圆规时,就会出现通过旋转身体、旋转纸张画圆等现象^[4],画出来的图形自然不规范、不标准。这在某种程度上会造成学生操作之后缺乏成就感,所以教材或教师要在适当的时机给小学生呈现工具的操作方法,让学生正确认识工具、操作工具,从而创造出美丽的图形。

(三)注重作图方法多样化

几何作图过程中的不同方法和途径,其本质都体现了对几何图形不同特征的认识。教材上给学生提供多种作图方法,有利于学生从多个角度认识图形,渗透几何学的思想方法,从多个方面巩固对几何核心知识的掌握。

不仅在教材中可以向学生展示多种作图方法,在教学中也应注重作图方法多样化。教学实践表明,对于明确的几何作图问题,如果仅仅给出作图的要求,不同的学生从多角度出发可能有不一样的解决方法,形成丰富多样的作图方法,这样有利于增强思维的发散性^[5]。学生选用多样的方法,运用不同的定理解决问题,更具开放性,也更能考查知识运用能力^[3]。

在多种方法的基础上,教师可以引导学生对作图方法进行分析和比较,找寻作图的最佳途径,提高运用所学知识解决其他相同或相似问题的能力,激发学生探究的兴趣,培养学生的创新能力与批判意识。

(四)注重作图步骤,培养学生推理能力

几何作图在推理能力培养方面的价值显而易见,几何作图是发展学生推理能力的良好载体^[5]。“学生作图的过程实质上是对图形的性质、基本事

实、几何定理的理解和应用的过程,增强了严谨的推理意识”^[6]。小学阶段,不要求学生进行严格的逻辑证明,但是2022年版课标中提到“通过对平面图形性质的认识,感知数学说理的过程”。说理能力体现的是思维的逻辑性与条理性,所以在几何作图中应该为小学生创造说理的基础条件,促进学生推理意识的形成,提高学生思维的逻辑性,使其养成讲道理、有条理的思维习惯。

创造说理环境即让学生通过详细展示作图步骤或操作方法来呈现清晰的作图思路,在一步步递进的作图步骤之间,教师可以引导学生回答怎么做及为什么这样做,让学生思考满足什么条件就可以作图,应该先确定哪条边或哪个角,甚至怎么做是不对的……这样的分析体现的是严谨的推理过程,也是作图前的说理。另外,作图完成后要让学生说理(证明),以确保作出的图形是正确的,无论是作法的思路探析还是正向或反向的说理,都需要学生调用所学核心知识、活动经验进行推理,这些过程凸显了作法背后理与法之间的关系,充分发展了学生的推理能力^[7]。

(五)利用几何作图,做好小学和初中几何课程的衔接

我国小学数学中的几何内容以传统运算为主,作图与说理(证明)相对较少,而进入初中,几何内容在质与量方面都有很大的变化,几何内容增多,几何证明与作图突然加强,这也导致部分学生到了初中学习几何时出现困难。从小学几何内容来看,适当加强几何作图,有利于做好小学和初中几何学习的衔接。从启林馆版教材中可以发现很多小学和初中衔接的内容。例如,在圆内作出等腰三角形是初中与圆相关的证明中经常见到的;几种平行四边形的作法,需要调动头脑中对平行四边形特征的认识,这些内容对应应在初中学习的平行四边形的判定定理;五年级教材中三种作全等形的画法,其实展示了三角形全等的三个判定定理(SSS、SAS、ASA);六年级作图形的缩放图对应初中学习的相似图形,其中提到的以图形的顶点为中心进行缩放,则属于古老的射影几何内容,其在绘画、摄影、航海中有广泛的应用。这些内容并不是初中几何(作图)内容的下放,而是在小学利用几何作图培养学生对几何知识的直观感觉与认识,同时拓展了学生的思维,发展了学生的推理

意识等核心素养,也为做好小学和初中几何课程的衔接提供素材与机会。

除了以上几点,教师平时还可以将几何作图与美育相结合,发展学生的创造性,例如,学习了画圆、长方形、平行四边形等基本图形之后,教师可以布置作业,要求学生利用基本图形的组合创造新的图形,让学生在作中玩、玩中学。几何作图最后呈现的作品应该是整洁、美观的,这对于培养学生的整体美感具有不可忽视的价值。

小学阶段学生所获得的几何作图的感觉与意识、技能与基本几何思想方法,不仅会为他们进入初中后学习几何课程做铺垫,也会为其他学科如物理学、建筑工程、艺术设计等中的作图奠定坚实的基础。因此在未来小学几何教学的过程中,以尺规作图为契机,教材与教学中可以尽量多为学生创造几何作图的环境,增加学生动手作图的机会,以几何作图为抓手,从小培养学生的几何直观,发展学生的数学学习兴趣,真正发挥几何作图促进学生核心素养发展的价值。

参考文献:

- [1]位惠女.为什么要在小学增加“尺规作图”内容:马云鹏教授、吴正宪老师访谈录(八)[J].小学教学,2022(12下).
- [2]聂灵沼.几何作图[J].数学通报,1957(2).
- [3]章飞.初中数学几何作图的教学实施建议[J].中学数学教学参考,2021(2中).
- [4]刘鹏,张丹,宋云凤.发挥直观想象,发展推理意识:尺规作图教学的思考与实践[J].小学教学,2022(5下).
- [5]章飞.几何作图的教学功能分析[J].中学数学教学参考,2021(1中).
- [6]唐彩斌,王罗那.小学数学增加“用直尺和圆规作图”的意义和策略[J].小学数学教育,2022(6上).
- [7]陶家友.关联调用核心知识,理性构建基本图形:一道尺规作图题的解法探究赏析及教学价值导向[J].数学通报,2022,61(3).

【作者简介】郭贝贝,青岛大学师范学院;仲晓倩,山东烟台经济技术开发区第十二小学;杨新羽、杨慧娟,青岛大学师范学院。

【原文出处】摘自《小学教学》(郑州),2023.10下。25~30