基于范希尔理论的“一题一课”教学探索

——以“图形与几何”领域练习教学为例

鲍善军　　朱曙光

【摘　要】基于范希尔理论探索“图形与几何”领域练习教学,教师需要聚焦“一题”整体性设计,精心设计与推进“一课”结构化教学,促使学生的直观认知从“混沌”走向“清晰”、思维水平从“视觉”迈入“分析”,进而从“分析”跃至“关系”,自然实现知识的融通与思维的生长,培育核心素养与关键能力.

【关键词】“图形与几何”领域;范希尔理论;“一题一课”教学;几何思维水平

“图形与几何”领域是义务教育阶段学生数学学习的重要领域,在小学阶段包括“图形的认识与测量”和“图形的位置与运动”两个主题.通过“图形与几何”领域相关内容的学习,学生能逐步培养空间观念、几何直观、量感、推理意识、应用意识等核心素养.依据范希尔理论,根据可观察的学习结果可以将学生的几何思维水平划分为五个水平(见表1).小学阶段一般只涉及前三个水平,大多数学生的几何思维水平始终停留在第一、二层次,达到第三层次及以上者寥寥无几.

表1　范希尔理论的几何思维水平

思维水平	思维层次	具体表现
水平1	视觉	仅能按照形貌从整体上辨识图形,这种辨识通常依赖于某种范式,既忽视图形的形状,又困惑于图形的性质.
水平2	分析	能分析图形的组成要素和特征,利用性质解决问题,但不理解性质之间的关系,也不了解图形之间的结构性关联.
水平3	非形式化的演绎	能建立图形和性质之间的关联,并进一步探求图形的内在属性及其包含关系,能使用公式、定理和性质进行演绎推理,但未能建立起定理之间的内在关系.
水平4	形式化的演绎	能用演绎方式证明猜测,并能以逻辑推理解释几何中的公理、定理、定义等,能比较一个定理的不同证明方式,能理解证明中的必要条件和充分条件.
水平5	严密性	脱离几何模型也能进行严密的推理.在不同的公理系统下严谨地建立定理,以分析和比较不同的几何体系.

练习是学生巩固知识技能、锤炼数学思维、发展数学素养的重要载体,受知识本位观念的影响,目前练习教学中简单的“拿来主义”现象普遍存在,呈现出练习形式单一、层次统一、质量不一等问题.实践表明,“一题一课”教学有助于实现学生几何思维水平的进阶.

“一题一课”是指通过对一个主题或一组习题的深入研究,科学、合理、有序地组织学生展开相关的数学探究活动,在“一课”中完成“一题”,借此“一题”促进学生对知识之间关联性的理解,实现“学一题、透一点、通一类”的教学目标.为此,我们基于范希尔理论探索“图形与几何”领域练习教学,聚焦“一题”整体性设计,走向“一课”结构化教学,促进学生几何思维的系统生长.

一、确立表象:直观认知从“混沌”走向“清晰”

处于视觉水平的学生,在识别图形时往往以图形的典型表象为依据,很少关注图形的局部特性.因此,教师要引导学生经历对图形深度且透彻的解析过程,使其理解图形的本质属性,建立正确表象,消除认知误区.

1.建模—解模,形成正确表象

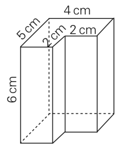
学生经历从构建模型到解析模型的知识产生和问题解决的全过程,能促进对几何图形的概念和特征的本质性认知,从而在思维意识里形成正确、具体的表象.

【案例1】“柱体的体积练习”教学设计

环节1:建立柱体模型.

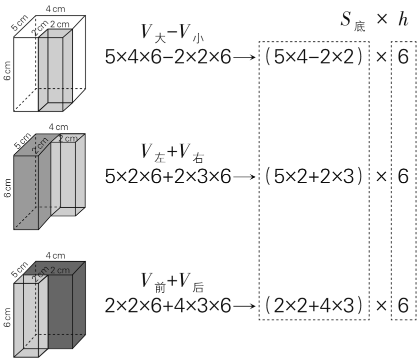
想象:多边形“L”(下图底面)向上平移6厘米扫

过的区域是什么图形(见下图)?



计算:这个立体图形的体积是多少?你能用不同的方法解决吗?

展示汇总方法,理清思路.



沟通:这些方法有什么相同之处?(6是这个立体图形的高,前面的算式都表示这个立体图形的底面积)

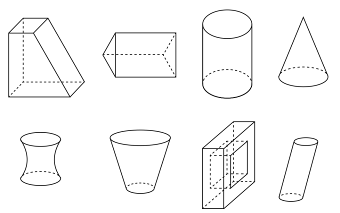
完善:这个立体图形的体积计算方法都是“体积=底面积×高”.

环节2:巩固柱体模型.

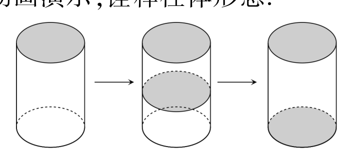
设疑:若以此立体图形前面的图形(长方形)为底面,能用这种方法计算体积吗?

释疑:不能,底面应该相对且大小相等、形状相同,若将前面的图形向后平移,前后不可能重合,所以不能用这种方法计算.

判断:下面立体图形的体积能用“体积=底面积×高”计算吗?



课件动画演示,诠释柱体形态.

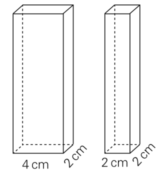


总结:柱体的底面应该相对且大小相等、形状相同,即底面沿着侧壁垂直移动能完全重合.

环节3:解析柱体模型.

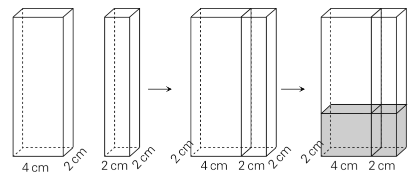
课件出示:

如果将60 mL的水倒入下面两个容器中,使它们的水面高度相等,则水面的高是多少厘米?



转化:将两个立体图形合并成一个柱体.

追问:可以怎么合并呢?



解决:$h=V\div S=60\div(2\times4+2\times2)=5$(cm).

总结:解决问题时,只要找到熟悉的数学模型,问题就自然迎刃而解.

教学中,教师在学生认识图形时不是简单地进行言语解析,而是引导学生经历“建模—固模—解模”的全过程,促使学生建立柱体的清晰表象,通透理解柱体的概念、性质和特征.

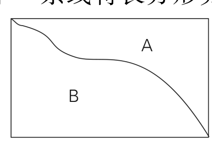
2. 思辨—感悟,消除认知误区

学生潜意识里对几何图形的表象有失偏颇在所难免,教师应以错例为资源组织学生示错、交流、识错、感悟,从而消除学生的认知误区.

【案例2】“周长的练习”教学设计

环节1:暴露错误.

分割:下图中一条线将长方形分成了两个图形.



比较:图形A、图形B的周长哪一个更长?

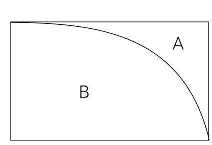
暴露:图形B看起来比图形A大,所以图形B的周长更长.

环节2:辨析素材.

辩论:长方形相对的直边的长度是相等的,中间的曲线是图形A、图形B共有的,所以这两个图形的周长相等.

明晰:你能上来指一指图形A、图形B的周长吗?(发现的确相等)

追问:下图中的两个图形呢?(一样长,直边相等,曲边共有)



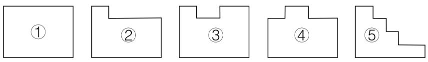
小结:一个图形的周长和它的大小没有本质性

关联.

环节3:深化概念.

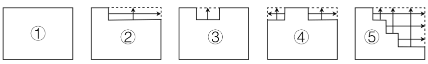
课件出示:

下列图形的周长相等吗?



转化:图形②、④、⑤可以转化成和图形①完全一样的长方形,所以它们的周长相等.图形③转化后比图形①多了两条竖直的短边.

深思:比较这些图形的周长,你发现了什么?



小结:缺口在角上时,图形的周长不变;缺口在边的中间时,图形的周长增加.

教学中,教师将学生的错误认知作为教学素材,组织学生互动质疑、修正阐述、巩固练习,引导学生走出直观水平的谬误区,逐步明确周长概念的本质,即“什么是周长”“周长与什么相关”.

二、融通归一:促进思维从“视觉”迈入“分析”

处于视觉水平的学生,仅能按照形貌从整体上辨识图形,对于图形的本质属性的认知却模糊不清.因此,教师要引导学生通过观察、度量、对比、建模等活动探寻图形的特性,深入了解图形的本质属性.

1.分类概括,完善特性认知

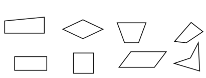
认识四边形后,教师可以引导学生将四边形进行分类,使学生在分类的过程中不断地“触碰”和“透析”图形的特性,进而完善对图形的特性的认知.

【案例3】“四边形的练习”教学设计

环节1:第一次分类,关注局部特征.

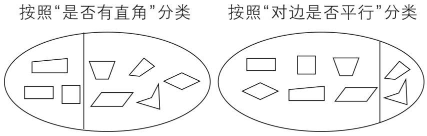
课件出示:

制订标准,给下列图形分类.



反馈:可以按照“是否有直角”和“对边是否平行”来分类.

按照“是否有直角”分类　　按照“对边是否平行”分类



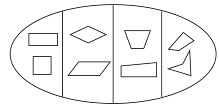
发现:虽然图形的形状各不相同,但它们都有某个相同的特征.

总结:直角梯形、长方形和正方形都有直角;长方形、正方形、平行四边形和梯形都至少有一组对边平行.

环节2:第二次分类,关注总体特征.

追问:还有不同的分类吗?

反馈:分成长方形、平行四边形、梯形和其他图形.



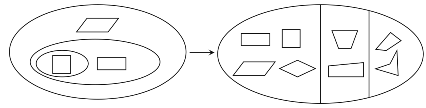
提问:这些图形分别有什么特征?

明确:长方形和正方形两组对边平行且相等,且有四个直角;平行四边形两组对边平行且相等;梯形只有一组对边平行;其他为一般四边形.

环节3:第三次分类,关注同类特征.

发现:长方形、正方形和平行四边形的共同特征是两组对边平行且相等;长方形和正方形是特殊的平行四边形.

反馈:可分为两组对边平行、只有一组对边平行和没有对边平行.



总结:两组对边分别平行的是平行四边形,只有一组对边平行的是梯形.

教学中,教师引导学生进行多次的分类、比较和概括,有利于学生对四边形的认知逐步从依据模糊感官的直观水平走向抓住清晰特征的分析水平.

2.数形结合,深化特征感悟

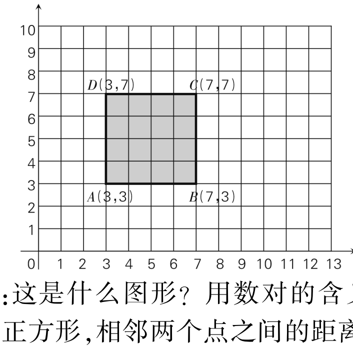
特征的了解离不开观察与对比,也需要在问题的探索中不断深化与巩固.教学中以数形结合的形式引导学生对几何图形的特征和性质进行重新认识,能促使学生产生更深层次的认知与感悟.

【案例4】“用数对确定位置的练习”教学设计

环节1:数对与正方形的结合.

罗列:用3、7这两个数组成有序数对.

绘图:描出这四个点,并依次连接形成封闭图形.



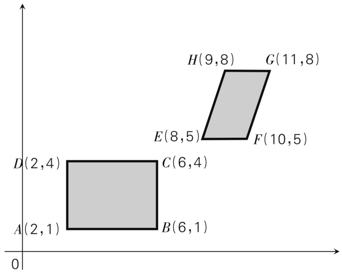
观察:这是什么图形?用数对的含义说明图形的特征.(正方形,相邻两个点之间的距离相等,且点A与点B同行,点A与点D同列,$\angle DAB=90°$)

环节2:数对与平行四边形的结合.

出示:第一组数对:$A(2,1)$、$B(6,1)$、$C(6,4)$、

$D(2,4)$;第二组数对:$E(8,5)$、$F(10,5)$、$G(11,8)$、$H(9,8)$.

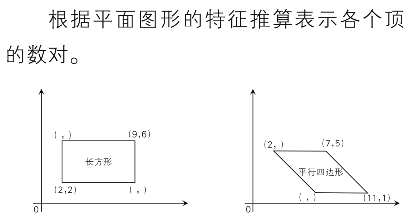
想象:四边形 $ABCD$ 可能是一个什么图形?四边形 $EFGH$ 呢?



判定:根据数对对图形进行判断并说明理由.

环节3:数对与平面图形的结合.

课件出示:



反馈:请说明解决问题的思路.(如:第一个图形,$6-2=4$,$9-2=7$,根据长方形的对边相等推断出另外两个数对)

点拨:解决第二个图形的关键是求出平行四边形上下底边的长.

教学中,教师引导学生将平面图形的边之间的关系与数对的行和列相结合,以数解形、以形助数,打通"数"与"形"之间的联系,让学生在解决问题的过程中促进对图形特征的理解,感悟数形结合思想.

三、关联结构:提升思维从"分析"跃至"关系"

处于分析水平的学生,对于图形的认知仍然是割裂的、零散的.因此,教师要帮助学生以整体的眼光审视几何图形,进一步引导学生探索几何图形之间的内在关联,将割裂的、零散的知识结构化、整体化.

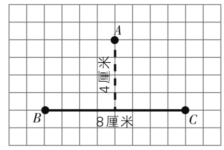
1.横向拓宽,建立结构整体

教师要引导学生通过思维发散与结构关联,把图形之间线性的、单向的逻辑关系转变成多向的、网状的认知结构,建立整体性的知识体系.

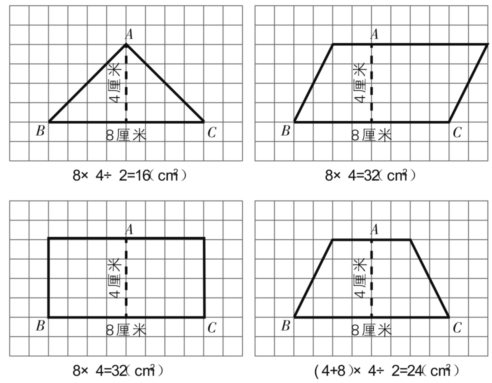
【案例5】"多边形的面积练习"教学设计

环节1:多维构建.

问题:在网格图上,通过 A、B、C 三点画出不同类型的多边形,并计算多边形的面积.



反馈:三角形、平行四边形、长方形和梯形.



梳理:这些平面图形的面积计算公式是怎么推导出来的?

环节2:整体关联.

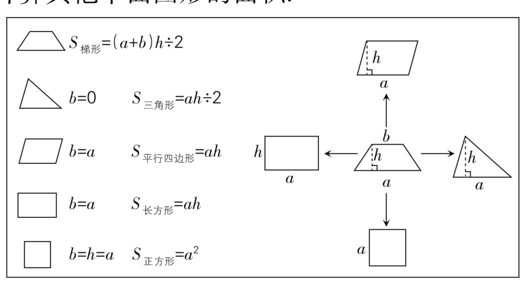
追问:如果要求只记一个平面图形的面积计算公式,你会选哪一个?

反馈:任意一种都可以,因为这些平面图形之间可以互相转化.

聚焦:梯形的面积计算公式对于其他的多边形都适用吗?

验证:先用梯形的面积计算公式计算面积,再用原有的面积计算公式进行验证,看猜想是否正确.

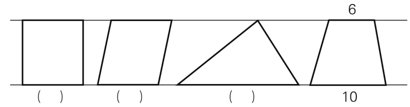
小结:三角形、平行四边形、长方形、正方形都可以看作是特殊的梯形,运用梯形的面积计算公式可以计算其他平面图形的面积.



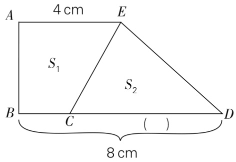
环节3:深化应用.

引导:能根据多边形的面积计算公式之间的关系解决问题吗?

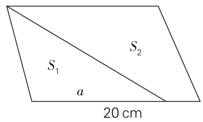
(1)如下图,在两条平行线之间有四个图形,若这四个图形的面积相等,那么另外三个图形的底分别是多少?



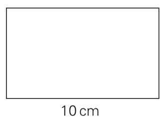
(2)如下图,$AE=4\text{cm}$,$BD=8\text{cm}$,梯形的面积等于三角形的面积,三角形的底 CD 是多少?



(3)如下图,一个底为 20 cm 的平行四边形被分成两部分,梯形的面积是三角形的面积的 1.5 倍,三角形的底 a 是多少?



(4)如下图,在长方形中画一条线,使得分成的两部分图形的面积相等.



总结:平面图形之间可以互相转化,因此平面图形的面积计算公式是相通的.

教学中,教师基于整体视角引导学生寻求平面图形之间的联系纽带,将原本孤立的知识点、彼此分割的方法策略联结成一个统一的整体,真正促使学生实现结构化学习,建立结构化知识体系.

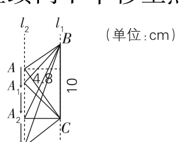
2.纵向深入,突破空间维度

通过图形的运动和演变,引导学生不断地进行纵向深挖,打破从一维到二维、从二维到三维的空间边界,这样有利于沟通点、线、面、体之间的关系,将相同几何图形研究透彻,将不同几何图形串联成线,从而建构新的知识体系.

【案例 6】"圆锥的体积练习"教学设计

环节 1:动态演变,突破空间.

观察:如下图,将三角形 ABC 的顶点 A 沿着直线 l_1 的平行线 l_2 向下平移至点 A_1 处组成新的三角形,面积变了吗?如果继续向下平移至点 A_2、A_3 呢?

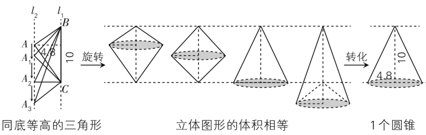


计算:同底等高的三角形分别绕直线 l_1 旋转一周后得到的立体图形的体积是多少?

想象:它们是怎么变化的?(从平面图形到立体图形,面动成体)

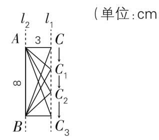
类比:原三角形与旋转后的立体图形之间有什么联系?旋转后的立体图形之间有什么异同?

总结:这些立体图形都可以转化成一个底面半径是 4.8cm、高是 10cm 的圆锥,即它们的体积一样大.



环节 2:由此及彼,拓展思维.

观察:如下图,将直角三角形 ABC 的顶点 C 沿着直线 l_2 的平行线 l_1 向下平移至点 C_1 处组成新的三角形,面积变了吗?如果继续向下平移至点 C_2、C_3 呢?

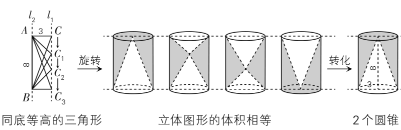


想象:同底等高的三角形分别绕直线 l_1 旋转一周后,可能形成什么图形?

计算:这些立体图形的体积是多少?

思辨:为什么这些立体图形的体积还是相等的?

发现:这些立体图形的体积都等于一个半径是 3cm、高是 8cm 的圆柱的体积减去与它等底等高的圆锥的体积,相当于 2 个圆锥的体积.



教学中,教师引导学生通过动态研究等底等高的三角形沿边或顶点所在直线旋转的变化规律及其原理,深层次地感悟二维平面图形与三维立体图形之间的关联,实现从面积相等到体积相等的融会贯通,深刻感受数学的独特魅力.

总之,基于范希尔理论的"图形与几何"领域的练习教学,教师需在原有"一题"的基础上有效建构知识体系,精心设计与推进"一课",引导学生通过问题探究凸显本质、梳理特征融通一类、关联知识建立结构,培育核心素养与关键能力.

【作者简介】鲍善军,浙江省杭州市钱塘区教师教育学院;朱曙光,浙江省杭州市钱塘区临江新城实验学校.

【原文出处】《小学数学教育》(沈阳),2023.10 上.12~15

【基金项目】本文系 2022 年浙江省教研课题"问题链:大概念统摄下'一题一课'教学的区域探索"(课题编号:G2022013)的阶段性研究成果之一.