

中华优秀传统文化视域下的小学数学 单元整体教学设计

——以“多边形的面积”为例

李建良

【摘要】中华优秀传统文化在小学数学教学中具有多方面的价值。在教学内容的把握方面,可以为教学顺序的确定与核心内容的提炼等提供启示;在教材内容的分析方面,可以为教材编排的合理性和教学框架设置的科学性等提供参考;在单元整体教学的设计方面,可以为整体目标的制订及围绕整体目标的分课时教学活动设计提供方向。文章指出,教师应以严格审慎、宁缺毋滥的态度,将中华优秀传统文化融入小学数学单元整体教学设计与实施的各个环节,促进学生对数学问题本质的深度理解和对传统文化魅力的深刻体会。

【关键词】传统文化;多边形的面积;单元整体教学;小学数学

近年来,随着《关于实施中华优秀传统文化传承发展工程的意见》《中华优秀传统文化进中小学课程教材指南》等文件的相继发布,中华优秀传统文化在教育教学工作中的重要地位日益凸显,中华优秀传统文化进校园、进课堂势在必行。传统数学文化作为中华优秀传统文化的重要组成部分,它的教育价值在我国中小学数学教学大纲和课程标准中被多次提及。特别是《义务教育数学课程标准(2022年版)》对此尤为重视,在修订原则、课程理念、教学建议、评价建议、教材编写建议等方面都提出了相应的要求。如何有效挖掘传统数学文化中的素材为数学教学内容的分析提供启示?如何处理我国传统数学文化与现行数学教材内容之间的关系?如何利用传统数学文化中的精华为单元整体教学所用?这些是中华优秀传统文化融入数学课堂面临的主要问题。本文以人教版数学五年级上册“多边形的面积”单元教学设计为例展开讨论。

一、传统数学文化对教学内容的启示

(一)关于教学内容顺序的启示

根据“历史相似性”原理,当前学生数学学习需要经历的过程,很大程度上与人类历史上数学知识的发生、发展过程相一致。传统数学文化中丰富的数

学史料,可以为教师设计教学方案、组织教学活动等提供素材和思路。英国数学教师齐利亚克斯基于自己的教学实践,总结了数学史对于教师和学生的价值,其中的一条是通过数学史获取引入新知识点的顺序。^[1]这一价值同样适用于传统数学文化。传统数学文化可以为不同教学路径的设计提供方向,也可以为某一教学路径是否具有科学性与合理性提供佐证。

不同版本的教材有关多边形面积的内容一般遵照平行四边形、三角形、梯形的顺序编排,这是不是唯一的顺序呢?《九章算术》中的“方田章”记载了多种平面图形面积的计算方法,包括方田、圭田、邪田、箕田、圆田、宛田、弧田和环田。其中,除宛田和弧田不属于小学数学教学内容外,其余基本和小学数学教材中的编排顺序一致,即长方形(正方形)、三角形、梯形、圆和圆环,但唯独少了平行四边形。查阅其余数学名著,如《孙子算经》《五曹算经》等,也不见有关平行四边形面积计算方法的记载。那么,少了平行四边形,是否会影响多边形面积计算公式推导的逻辑顺序呢?《九章算术》中关于三角形面积的计算提到:“圭田术曰,半广以乘正从。”我国数学家刘徽对其解释为“半广知,以盈补虚为直田也”,并提出另

一种方法“半正从以乘广”. 苏教版和人教版数学教材分别对两种方法进行了介绍并给出图示(如图1、图2).

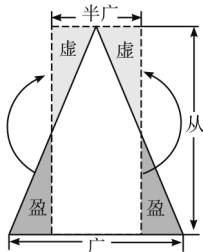


图1 苏教版教材关于三角形“半广以乘正从”的图示

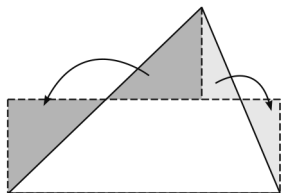


图2 人教版教材关于三角形“半正从以乘广”的图示

《九章算术》把梯形分为邪田(直角梯形)和箕田(等腰梯形)两类,两者的面积计算公式相似,分别是“并两邪而半之,以乘正从若广”和“并踵、舌而半之,以乘正从”,即梯形的面积 $=(\text{上底}+\text{下底})\div 2\times\text{高}$ 。另外,梯形面积还有另一种算法:“半正从若广,以乘并”,即梯形的面积 $=\text{高}\div 2\times(\text{上底}+\text{下底})$ (如图3)。

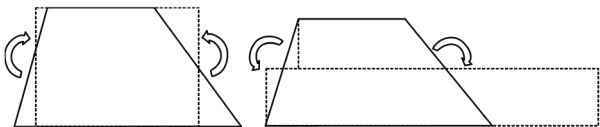


图3 梯形的两种“出入相补”转化方法

在《九章算术》中,三角形和梯形面积的计算方法是一脉相承的,都是利用了“出入相补”原理转化成长方形。当然,这一方法也可以用于平行四边形的面积公式推导。借由传统数学文化可知,没有平行四边形也不影响三角形和梯形面积公式的推导,换言之,平行四边形的面积并不一定要安排在三角形或梯形的面积之前,它们之间没有严格的先后顺序,这就为不同教学顺序和路径的设计提供了依据。

(二)关于核心内容提炼的启示

某一类数学知识在发生、发展和完善的过程中,必然会形成一个核心内容。这个核心可以表现为核心问题、核心知识、核心方法或核心思想等,它揭示

了一类问题的数学本质,并贯穿学习的始终。教师能够抓住核心问题,就能切中要害,达到提纲挈领的效果,使数学教学的难点迎刃而解。传统数学文化在漫长的发生、发展、巩固和应用的过程中去粗取精、不断完善。由此,数学问题的表象逐渐剥离,本质逐渐清晰。这个过程对师生双方都具有启发作用,比如能克服常见的主次不分、舍本逐末的弊端,能从中获得问题研究的视角、思路 and 方案等。

笔者对人教版、苏教版、北师大版等版本的数学教材进行梳理和分析发现,各版本数学教材“多边形的面积”单元基本按照“平行四边形面积—三角形面积—梯形面积—组合图形面积—不规则图形面积”的顺序编排。在各版本数学教材六年级下册总复习中,都通过图示对平面图形的学习路径进行了整理(如图4)。

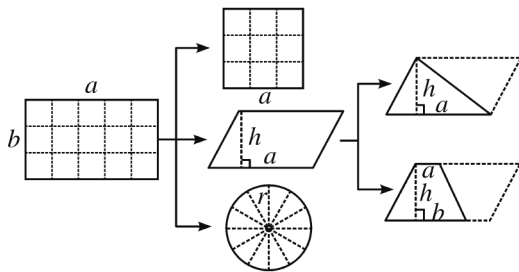


图4 平面图形面积的学习路径

从平面图形面积教学的整体性角度来看,这样的编排存在一个较大的问题,即忽视了圆的转化是建立在将圆分割成若干(偶数)个近似三角形的基础之上的。各版本数学教材“圆的面积”一课中,主要都安排了通过小正方形或网格图估算圆的面积和通过分割重组的方法将圆转化成近似平行四边形(或长方形)两种方法。但是以上两种方法之间并不存在直接的联系,也就是说,圆是很难直接转化为长方形的。并且,教材前期并没有相关的铺垫,学生又如何能想到将圆分割成若干个近似三角形呢?通过对《九章算术》及刘徽注释的研究,郭书春认为,刘徽的面积理论是一个以长方形面积为出发点,以三角形面积为核心,运用“出入相补”原理和无穷小分割方法的有机整体。^[2]陈敏、许含英认为,平行四边形、梯形都可通过对角线分成两个三角形,因此可以用三角形面积计算公式来导出平行四边形与梯形面积的计算法则。最后,可将圆无限细分成近似三角形,再

同样以三角形面积之和来求圆的面积。^[3]既然圆的面积研究绕不开三角形,而三角形又是直线图形中最基本的图形,那么,何不未雨绸缪,在“多边形的面积”单元中,就确立以三角形的面积计算方法为核心,来推导其他图形的面积公式呢?因此,在长方形面积计算方法的基础上,以三角形的面积计算方法作为平面图形面积体系的核心展开学习也是值得尝试的。

由上可知,传统数学文化在漫长的历史中,经历了实践的检验,形成了自己的体系,为教师提炼单元核心内容提供了视角,也为核心内容的准确性提供了依据和保障。

二、传统数学文化与现行数学教材的关系

(一)基于传统数学文化视角的教材内容分析

在整体教学思路上,教材的编排遵循螺旋式上升的规律,但具体到每个课时,往往是各有侧重的。教师在对教学内容进行分析与设计时,如果不能把握现象背后的数学本质,那么在对单元核心的把握上容易出现问題,从而导致看似面面俱到,实则各行其是的不利局面。如果教师对传统数学文化或相关的数学史料具有充分的了解、认知和理解,则能更好地根据数学发展的规律把握全局,在提炼单元核心的基础上,使教学设计的历史序、逻辑序和认知序更好地融合。

现行教材大多将平行四边形的面积置于单元的第一课时,随后,主要通过“倍拼法”将三角形和梯形转化成平行四边形来推导它们的面积公式。但这种方法无法体现平面图形的“运动不变性”这一重要属性,反之,“出入相补法”与“运动不变性”的关系非常紧密。因此,采用“出入相补法”推导面积公式,更能充分体现三角形作为平面图形面积研究的出发点的地位和作用。那么,如果要尝试以三角形为核心推导其余平面图形的面积公式,又需要哪些知识、技能、方法和原理的支持呢?显然,以“出入相补”原理为依据的图形分割、运动是重要的一面。另外,还需要用到“等底等高的三角形面积相等”这一规律。大多数教材都没有将“等底等高”规律作为一个独立的内容来学习,一般把相关的问题编排在练习课中,目的是利用“等底等高”规律解决图形面积计算的相关

问题,促进图形之间的一致性认知和理解。但是,这一规律的一个重要价值——在将多边形分割成三角形的基础上,通过运动变换,借助“等底等高”规律合并成大三角形,通过类比推导多边形的面积公式没有得到充分发挥。

因此,如果确立以三角形面积作为多边形面积学习的核心,则能充分将“出入相补”原理与“等底等高”规律融为一体,凸显图形面积的本质属性,更好地体现数学学习的整体性与一致性。

(二)融合多种元素的单元教学路径架构

传统数学文化有其独特的价值和魅力,但传统数学文化进课堂,并不排斥外国数学文化的引入。多元文化进课堂,能使学生在古今对照、中外对比中,更好地理解数学的本质,更多地了解世界文化,更好地感悟传统数学文化的独特魅力。^[4]而要更好地发挥传统数学文化的价值,必须将其与数学教材内容及常用方法等多种元素进行有效关联和整合。

将“出入相补”原理与“等底等高”规律有机融合,既能体现图形的“运动不变性”属性,又能确立以三角形面积计算方法为核心的多边形面积计算公式推导体系,同时还能兼顾长方形面积这一基础,并将多边形面积公式的推导方法和过程推广到正多边形,为后续圆面积的学习提供思路和方法,帮助学生平面图形的面积公式推导形成更为整体、一致的认知与理解。基于对传统数学文化的整理、解读,以及对现行教材的分析和重构,我们可以把多边形的面积体系看作一棵小型的“结构树”。其中,长方形(正方形)的面积是根本,三角形的面积是主干,平行四边形、梯形、组合图形(正多边形)的面积,包括后续圆的面积,都可以看作分枝(如下页图5所示)。有了这棵“结构树”,“多边形的面积”单元教学的路径就变得清晰且具有可操作性了。

三、融入传统数学文化的单元整体教学设计

单元整体教学最本质、最关键的应该是基于“大单元”或“系列单元”的视角,打破自然单元之间和课时之间的壁垒,提炼单元核心概念,围绕核心概念,提出单元核心问题,以核心素养为目标进行整体设计。^[5]传统数学文化兼具门类齐全、脉络清晰、知识丰富、方法多样、思想深刻、体系完备等特点。在数学

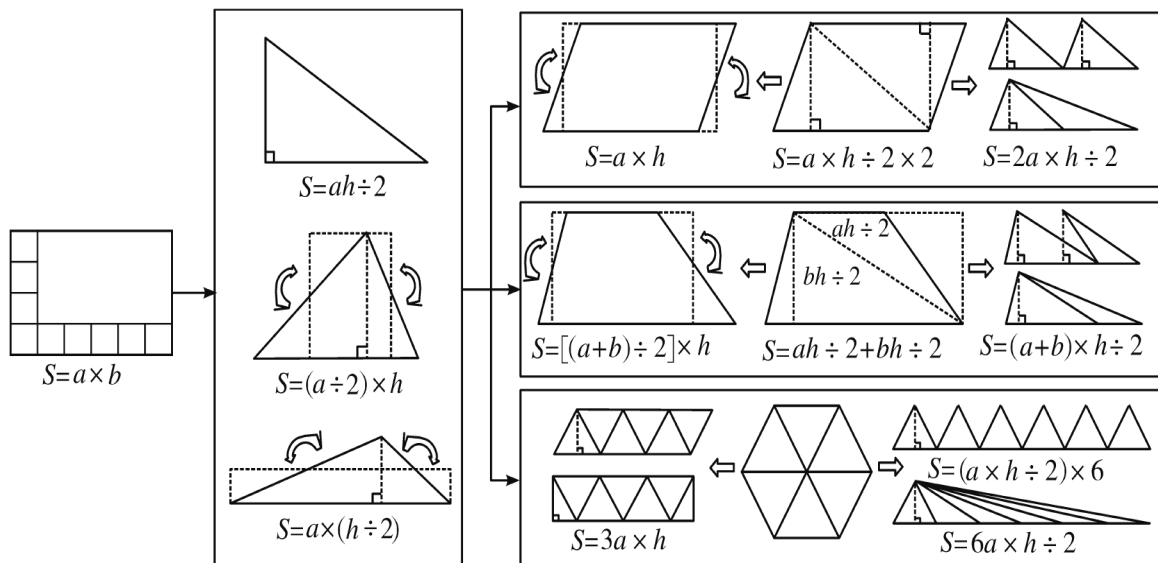


图5 以三角形面积公式为核心的多边形面积学习路径

教育教学活动中,相较于单课时教学而言,将传统数学文化运用于单元整体教学活动,更能发挥其重要价值。根据单元整体教学的特点和实际需求及传统数学文化的育人价值,教师可以通过搜集与整理、筛选与解读、分析与关联、设计与融合等环节,制订教学目标,调整教学内容,形成单元整体教学设计。

笔者通过对“多边形的面积”单元进行素材整理、核心聚焦、教材分析与路径构架,形成了单元整体教学目标:(1)以长方形面积公式为基础,以三角形面积公式为核心,探索并经历多边形面积计算公式推导的过程;(2)综合运用多种知识、结论、方法、原理和规律,借助统一路径,探究并得出各类多边形的面积计算公式,并体会它们之间的关系;(3)了解传统数学文化,体会传统数学文化的魅力,感受传统数学文化与现代数学方法相结合的巨大推动力。

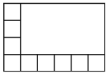
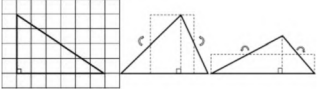
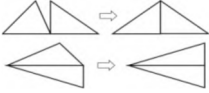
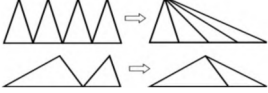
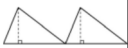
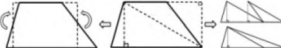
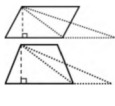
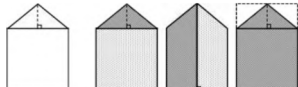
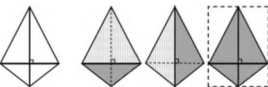
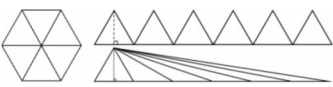
围绕核心内容,本文将“多边形的面积”单元的内容进行了适当的调整,主要是四个方面:一是将三角形的面积调整为第一课时,以便平行四边形和梯形都能转化为三角形进行公式推导;二是根据平行四边形与梯形都能分解成两个三角形再组合成大三角形的特点,将平行四边形与梯形的面积合并为一个课时;三是在组合图形中融入正六边形面积的研究,让学生进一步体会“出入相补”原理和

“等底等高”规律的运用价值;四是考虑到不规则图形的面积与单元核心内容之间的关系比较疏远而暂时未将其纳入单元整体教学中来。

因此,本文研究的内容主要包括“三角形的面积”“四边形的面积”和“多边形的面积”三个课时(见下页表1)。在第一课时中,教师主要借助网格图,鼓励学生从长方形与直角三角形的面积的两倍关系及“出入相补”(移多补少)两个角度推导出直角三角形的面积公式,并将“出入相补”的方法推广到锐角三角形和钝角三角形面积公式的推导。另外,在运用面积公式计算等底等高的两个三角形面积的过程中,教师引导学生体会等底等高的三角形面积相等的规律,使学生能运用该规律解决等高不等底和等底不等高两类变式问题,加深对上述规律的理解。在第二课时中,教师在唤醒学生多边形内角和探究方法和经验的基础上,引导学生尝试将平行四边形分割成两个三角形,并通过“等底等高”规律或乘法分配律来推导平行四边形的面积公式。随后将平行四边形的面积推导过程迁移到梯形中,推导出梯形的面积公式。当然,这两种四边形也均可采用出入相补法转化为长方形进行面积公式推导。此外,学生还需结合三角形、平行四边形、梯形的面积公式推导过程和结果,感受三者之间的联系和互相转化的途径,将“等底等高”规律推广到多种平面图形中。在第三课时中,教师在常见的组合图形

表 1

“多边形的面积”单元整体教学设计

课时	复习导入	新知探究	迁移运用	拓展提升
三角形的面积（第一课时）				
	长方形的面积	根据三角形与长方形的关系,用不同的方法推导三角形的面积公式	两个等底等高的三角形的面积关系以及它们的和	①若干等底等高的三角形的面积和 ②等高不等底的三角形的面积和
四边形的面积（第二课时）				
	全等三角形的面积和	平行四边形转化成三角形或长方形进行面积公式推导	梯形转化成三角形或长方形进行面积公式推导	根据数据特点,结合“等底等高”规律,发现多边形之间的关系
多边形的面积（第三课时）				
	基于三角形的转化	用不同的方法计算组合图形的面积	从不同的角度分析并计算筝形的面积	正六边形转化为三角形进行面积计算的方法

问题解决的基础上,加入筝形和正六边形,从不同角度运用“出入相补”原理和“等底等高”规律解决两者的面积计算问题,并得出正六边形的面积公式 $S = C \times h \div 2$,为后续圆的合理分割及圆面积公式的推导奠定基础。

将中华优秀传统文化用于核心问题的分析与提炼、教材内容的调整与关联、教学路径的设计与实施,能对实现整体单元教学目标起到积极的推动作用。在借助传统数学文化开展教学设计的过程中,教师应秉持严格审慎、宁缺毋滥的态度,在有理有据的前提下,将中华优秀传统文化与数学学科发展前沿、数学教育教学最新理念相结合,进行大胆的教学创新。在此过程中,特别要发挥传统数学文化在单元整体教学中提供整体视角、聚焦核心问题、整合学习素材、达成一致理解的价值,使学生有更多的时间和机会浸润在传统数学文化之中,从而促进学生对数学问题本质的深度理解和对传统文化魅力的深刻体会。

参考文献:

- [1]汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. 北京:科学出版社,2017.
- [2]郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽[M]. 济南:山东科学技术出版社,1992.
- [3]陈敏,许含英. 三角形和梯形面积教学研究[M]. 北京:教育科学出版社,2014.
- [4]岳增成,陈梓欣,林永伟. 中华优秀传统数学文化进课堂:价值、标准与路径:以“出入相补原理”为例[J]. 小学教学, 2022(4下):4-7.
- [5]金岚. 核心概念统领下的小学数学单元整体教学实践研究:以“图形的测量”单元为例[J]. 吉林省教育学院学报, 2022(5):75-79.

【作者简介】李建良,杭州市萧山区夹灶小学高级教师,主要研究方向为 HPM 视角下的小学数学教学、中华优秀传统文化与小学数学教学(浙江 杭州 311247)。

【原文出处】《中小学课堂教学研究》(南宁), 2024.1.46~50