

# 高一学生函数相关概念理解 认知障碍研究

马淑杰 陈福印 张景斌

**【摘要】**基于认知学习的视角,实证地研究了高一学生函数相关概念理解的主要认知障碍包括概念表征与解释障碍、抽象数学符号或语言理解障碍、思维定式及关联障碍。导致认知障碍的影响因素既有认知发展水平、原有知识与经验、概念意象和学习认知负荷等学生自身认知学习的因素,也有教师及其教学和学习材料的特征等外在因素。

**【关键词】**函数相关概念;概念理解认知障碍;影响因素;实证研究

## 一、问题提出

自从自变量数学产生以来,函数概念一直处于数学的核心位置。德国数学家 F. 克莱因(F. Klein)把函数称为数学的灵魂。《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》将函数作为贯穿高中数学课程的主线。

与初中相比,高中阶段对函数概念的定义具有高度的抽象性和形式化特征。学生要建立完整的函数概念,不仅要理解函数是刻画变量之间依赖关系的数学模型,更要理解函数是实数集合之间的对应关系。不仅如此,函数的多元表征、函数本身包含的子概念多且类型复杂等都给学生理解函数概念带来了很大困难。

学生在学习中出现的错误是确定过程的结果,而不是简单的缺少正确答案,或是不幸的偶然事件。当依据个体在学习中的困难对其学习错误进行分析时,应该承认错误也是教育过程中其他变量的函数(Radatz, 1997)。本研究基于认知学习的视角,对高一学生在理解函数相关概念中存在的主要认知障碍及其影响因素进行了实证研究,以期有效改进教学,为提升学生对函数相关概念的理解水平提供有意义的指导。

## 二、研究设计

### (一)概念界定

本研究中学生数学概念理解的认知障碍,指学生不能对所学数学概念建立适当的心理表征。具体表现为:不能用自己的语言对数学概念进行正确的描述或解释;不能运用适当的形式对数学概念进行

表示,或不能在不同表示形式之间进行转换;不能与相关知识或方法建立起一定的关联,或建立了不恰当的关联,从而不能对其进行正确应用。

由于函数的单调性、奇偶性和最大(小)值都具有概念的属性,为方便起见,本研究将高中函数主题中“函数的概念与性质”单元中的七个具体概念,即函数的定义、定义域、值域、表示法、单调性、奇偶性和最大(小)值,统称为函数相关概念。

### (二)研究方法

由于学生对数学概念理解的认知障碍及其影响因素的揭示需要通过在学生阐释概念和运用概念解决问题的过程中暴露出来,故本研究主要采用了问卷调查法和访谈法。

### (三)研究对象

本研究首先采用目的性分层抽样的方式,对北京市 T 区四所高中的 1038 名高一学生实施了函数相关概念理解现状调研,而后在对被试的错误作答进行文本分析的基础上,对同一问题的相同或相似错误作答,采用目的性方便抽样的方式抽取 51 名被试实施了一对一追踪访谈。

## 三、研究结果

### (一)函数相关概念理解的主要认知障碍

本研究最终获得学生对函数相关概念理解的主要认知障碍有:概念表征与解释障碍、抽象数学符号或语言理解障碍、思维定式、关联障碍。

#### (1)概念表征与解释障碍。

概念表征与解释障碍,指学生在认知结构中不

能正确表征数学概念,或不能正确地对概念进行解释与说明.

调研中,通过下面这道题目考查学生对函数概念的理解.

**题目** 设集合  $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ,  $N = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$ , 函数  $f(x)$  的定义域为  $M$ , 值域为  $N$ . 判断图 1 中的四幅图是否可以作为函数  $f(x)$  的图象, 并说明理由.

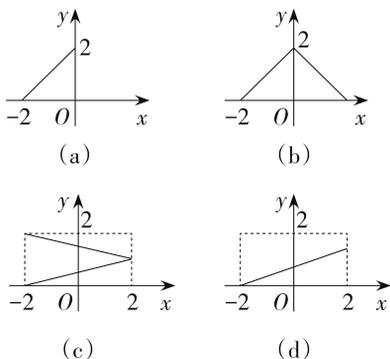


图 1

在作答中,很多学生错误地认为图 1(d) 可以作为函数  $f(x)$  的图象. 经过访谈,了解到错因在于学生在构建函数概念时,将函数的值域表征为一个包含函数实际值域的更大集合.

### (2) 抽象数学符号或语言理解障碍.

抽象数学符号或语言理解障碍,指学生难以把握数学概念的定义中所包含的抽象数学符号或语言的本质.

#### ①对符号“ $\forall$ ”与“任意性”的理解障碍.

在单调性与奇偶性概念的学习中,很多学生对符号“ $\forall$ ”及自变量取值“任意性”的理解存在障碍. 有的学生将“任意的”与“随意的”“无穷多”等价;有的学生在证明函数的单调性时,忽视  $x_1, x_2$  取值的任意性,甚至直接将“ $\forall x_1, x_2$ ”用两个具体数值代替. 这些情况在一定程度上说明学生没能准确理解抽象符号“ $\forall$ ”所代表的含义及其作用.

#### ②对“对应”的理解障碍.

对学生而言,函数定义中“对应”这一数学语言既具体又抽象. 说具体,是因为当给定自变量的一个具体取值时,学生能够运用解析式计算出与其对应的函数值,从而清晰地看到这种“对应”. 学生感到抽象的原因至少有两个方面:其一,当自变量在某一范围内取值时,对应的函数值是不能直接或不能完全看到的具体数值;其二,当一个函数在定义域的不同区间上有不同的对应关系时,学生难以理解这种区间与“对应关系”的对应.

例如,对于“函数  $f(x) = \begin{cases} (a-1)x+3a, & x < 1, \\ \frac{a}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$  在

$\mathbf{R}$  上单调递减,求实数  $a$  的取值范围”这道题目,很多学生在求解过程中直接列式  $(a-1)x+3a > \frac{a}{x}$ . 这表明他们对“对应”的内涵理解存在障碍,直接将两个在不同区间成立的“对应关系”写在了一起.

#### ③对“ $\leq$ ”的理解障碍.

在最大值的学习中,部分学生因为不能正确理解符号“ $\leq$ ”所表征的逻辑关系(认为“ $\leq$ ”成立,则“ $=$ ”一定成立),从而导致其对最大值概念的理解障碍.

本研究发现,学生对抽象数学符号或语言的理解障碍,不但会影响其对概念本身的准确理解,还会因为不理解而只能进行形式上的“模仿”,导致不同概念或方法的混淆,从而造成诸多错误.

#### (3) 思维定式.

思维定式指学生将先前形成的已经不适应新概念学习的知识与经验、解题方法或思维方式等不自觉地带入新概念的学习或运用之中.

高中函数学习是建立在初中函数学习基础之上的一个更高阶段的学习. 学生容易把初中阶段所形成的概念理解或思维模式等带入高中阶段的函数学习之中. 已有研究表明,这种从一个水平到另一个水平的概念学习,比学习一个全新的数学概念出错率更高,其主要原因在于学生的认知发展不一定能够与概念发展的层次或阶段同步. 这种认知与概念发展的差异容易导致学生出现数学概念学习的认知障碍.

在调研中,部分学生在构造定义域为  $(-1, 1]$  的函数时,写出类似  $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}$  或  $\frac{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+1}}{x+1}$  的式子.

经过访谈,了解到由于学生所学到的函数解析式中“ $=$ ”左侧都是因变量  $y$  (或  $f(x)$ ),便认为只要写出“ $=$ ”右侧符合条件的含有  $x$  的式子就可以了,而没有意识到这样的式子中没有体现自变量与因变量之间的对应关系.

#### (4) 关联障碍.

概念之间的联系贯穿概念学习的始终. 无论是新概念的形或概念的运用,都需要建立与其他概念或知识之间的联系,而在建立联系的过程中就可能产生错误. 关联障碍,指学生在数学概念的学习与运用中对概念内部或概念之间不能建立完整的关

联或建立了不恰当的关联,以及关联出现逻辑错误等。

在调研中,有部分学生在根据函数  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  的解析式探究其性质时,仅仅因为解析式在形式上相似,便完全“类比”函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  得到函数  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  的图象与性质。这说明学生可能会因为函数图象或解析式在“形”上的相似而进行错误地“类比”,甚至错误地“代替”。

需要指出的是:一方面,本研究所发现的以上四类认知障碍不是完全割裂的,根据学生呈现出的错误的实际情况,发现它们之间可能存在一定的内在联系;另一方面,结合学生呈现出的错误的复杂程度,认为有的错误会同时涉及两种或两种以上的认知障碍。此外,如果从更广泛的视角进行分析,关联障碍与思维定式都可以归入负迁移导致的障碍之中。

## (二) 函数相关概念理解认知障碍的影响因素

学生个体所建构的概念理解,既不完全来自外部提供的信息,也不完全基于其原有的认知与经验,而是个体思维的产物。学生个体内化数学概念的过程与学习材料的特征、教师及其教学,以及学生个体的认知加工均有着密切的关系。本研究借助学生的错误作答文本和一对一访谈所获信息,基于数学概念学习过程的构成要素,即学习材料、教师、学生三个方面,分析了导致学生概念理解认知障碍的主要影响因素及其之间的关系。

### (1) 学习材料的特征。

本研究发现初、高中函数学习材料的特征从不同侧面导致了学生概念理解的认知障碍。

#### ① 初中阶段函数的局限性。

首先,定义的局限性影响学生的概念意象。初中阶段将函数的定义表述为“在一个变化过程中,有两个变量  $x$  和  $y$ ……”,而在此定义之前,教材中明确区分了变量与常量,并将变量定义为“在一个变化过程中,可以取不同数值的量”。按照上述定义,学生很容易形成“函数必须有两个变量,即自变量与因变量,而且它们都应该是变化的”这样的理解。事实上,数学中的变量包含常量,也就是在数学中常量被看作一种特殊的变量,而函数中的变量具有更一般的意义。变量概念的形成是辩证法在数学中运用的典范。对于八年级的学生而言,其受认知发展水平的影响,理解这一辩证关系尚存在困难。因此,他们容易形成

“函数的自变量与因变量都应该是变化的”这一概念意象。

其次,解析式的特征影响学生的概念意象。本研究发现,由于初中阶段所学的几类具体函数都能用解析式表示,且它们的解析式从形式上看都与方程一致,即都是“含有未知数的等式”。因此,绝大多数学生会形成函数是方程的概念意象。他们认为函数都应该有  $x$  和  $y$ ,都应该有解析式。于是,部分学生在内化高中阶段的函数定义时,直接用解析式替代对应关系,认为函数的三要素是“定义域、解析式和值域”。不仅如此,在他们的意象中,函数的解析式具有非常固定的形式,即“ $y =$  一个含有  $x$  的代数式”的形式。特别地,  $x$  被认为是自变量的代名词。

再次,图象与定义域的特征影响学生的概念意象。由于初中阶段所学三类具体函数不但都能够用图象表示,而且其图象要么是直线,要么是有规律的光滑曲线。这使得学生将函数图象是“规则的”作为判断函数的依据。对于定义域,大多数学生形成了“自变量的取值范围是全体实数”的思维定式。

#### ② 高中阶段学习材料的“高”认知负荷。

首先,概念定义本身的“高”认知负荷。本研究发现几乎所有受访学生都不能完整地表述高中阶段的函数定义,而且绝大部分学生在运用初中阶段学习中所形成的函数概念意象或定义解决问题。从学习认知负荷的视角来看,高中阶段的函数定义本身所引发的内在认知负荷远远高于初中阶段的函数定义。这导致学生在运用集合语言与对应关系表述函数定义时感到困难,并采取回避的态度。不仅是函数定义,访谈中学生在表述单调性定义及运用“定义”对自己的作答进行解释时,基本习惯于运用“ $y$  随着  $x$  的增大而增大(或减小)”这一初中阶段所学的描述性语言。从学习认知负荷的视角分析,与这一简单的描述性语言相比,高中阶段单调性定义中形式化的符号语言会对学生产生很高的认知负荷。

其次,概念运用中学习材料的“高”认知负荷。在高中阶段函数的学习中,数学概念的抽象化程度较之前有了较大幅度的提高。问题的复杂程度及表述的符号化和形式化明显增强,使得学生在解决一个数学问题时,需要同时关注和处理多个信息元素及其关系。由此便容易导致处于高一一年级认知发展水平的学生在概念的运用过程中出现“过高”的认知负荷,从而导致认知障碍。

#### (2) 教师要素。

① 片面的概念理解导致学生错误的概念意象。

本研究发现,很多学生将“ $y$ 随着 $x$ 的变化而变化”作为函数的定义和判断依据.显然,这是对函数概念的片面理解,不是教材中对函数定义的表述.在访谈中,有的学生表示自己的初中数学老师曾经这么说过.可见,学生的这一概念意象很可能源于其数学老师的表述.

为了进一步了解教师因素对学生概念理解的影响,本研究针对学生对函数的一些片面或错误的概念意象,对研究者所任教学校的初、高中共28位数学教师实施了函数理解问卷调研.对于问题“依照您的见解,什么是函数?”的调研结果表明:有6位教师在表述中出现了“函数是 $y$ 随着 $x$ 的变化而变化”这一观点.这表明,部分教师确实存在与学生相同的概念意象.由此不难推断,教师自身对相关概念的片面理解会通过教学等途径自然地传递给学生.

### ②某些教学行为导致学生错误的概念意象.

本研究发现,教师的某些教学行为或习惯有时会在一定程度上导致学生理解的认知障碍.在高中阶段的数学教学中,教师经常会基于个人经验将某些类型题的求解方法转化为操作性很强的解题程序,甚至形成口诀教给学生.然而,在学生没有真正理解数学概念或方法的情况下,就教授给他们一些程序化、操作性的解题方法,虽然易于学生完成解题,但这种完全依靠形式化模仿的解题过程,自然容易导致学生对不同概念或方法的理解与应用出现混淆.

### (3)学生要素.

#### ①思维发展水平的局限性导致概念理解障碍.

学生的思维发展是从具体形象思维逐步过渡到形式逻辑思维再到辩证思维的.初中阶段,学生以形式逻辑思维为主,到了高中阶段,学生在继续完善形式逻辑思维发展的前提下,辩证思维开始逐渐占主流.但是由于辩证思维是人类思维发展的最高形态,而中学生的辩证思维基本上处于形成与发展的早期.因此,一方面,高一学生的辩证思维还处于很不成熟的时期,思维水平基本停留在形式逻辑的范畴,只能局部、静止、分割、抽象地认识所学事物;另一方面,函数概念的形成必须突破形式逻辑思维的局限,进入辩证思维的领域.这一矛盾是导致学生对函数相关概念理解认知障碍的一个重要因素.如前所述,学生在构造函数解析式时,之所以只构造出一个含有 $x$ 的代数式,就是由于其缺乏对函数概念中的变量和对应法则的认识.

#### ②必备基础的不足导致概念理解障碍.

奥苏贝尔指出,如果把全部教育心理学仅仅归结为一条原理的话,一言以蔽之:影响学习的唯一最重要的因素就是学习者已经知道了什么.他进一步指出,与新知识学习相关的学习者的原有知识与经验的明晰性、稳定性及组织特征决定性地影响着新知识意义理解的正确性与明晰性,也严重地影响着它们当前的和长期的可提取性.

在调研中,有学生将函数的单调区间写成:增区间是 $[-3 < x < -0.5]$ 且 $[2 < x < 3]$ .访谈中,该学生表示:“这个函数的增区间是 $[-3, -0.5]$ ,还有 $[2, 3]$ ,但是不能写成并集的形式.”可见,该学生能够正确理解函数的单调递增区间的含义,而导致错误的原因是其对区间与集合这些抽象符号的理解与表示存在混淆.

#### ③不正确的认知加工导致概念理解障碍.

学生对数学概念的意义构建,既会受到其原有知识与经验特征的影响,也会受到学习过程中对某些情境的不恰当的认知加工的影响.

在函数概念的教学,由于根据图2(人教A版《普通高中教科书·数学》必修第一册中的数学概念引例)不能准确确定空气质量指数 $I$ 的取值范围,于是借助图中能够看到的较大范围(区间 $[0, 150]$ )实现了运用集合与对应语言表述 $I$ 与时间 $t$ 的函数关系.然而,由于部分学生没能充分理解整个抽象过程,只记住可以用一个比值域范围更大的集合代替值域,从而导致认知障碍.可见,学生对于教学过程中的这一情境(或“操作”)的不恰当认知加工导致了其理解的认知障碍.

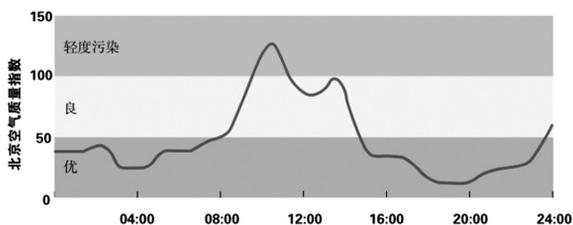


图2

需要指出的是,虽然本研究仅关注从认知学习的视角研究学生数学概念学习的影响因素,但在研究过程中也发现部分学生的某些非认知因素导致了其理解的认知障碍.例如,有的学生之所以只借助两对特殊值来判断函数的奇偶性,原因在于“觉得如果用定义去判断,计算会复杂而且容易算错”.正如有研究者所指出的,学生喜欢简单的、容易的方法,而害怕困难的东西.

(三) 理解认知障碍及主要影响因素之间的关系

图3呈现了高一学生对函数相关概念理解的主要认知障碍及其影响因素之间的关系. 图中箭头连接了认知障碍与其影响因素及各影响因素之间的关系, 可见学生认知发展水平的不足, 必备的原有知识与经验的缺失或不完备、错误或片面的概念意象是导致学生上述四类数学概念理解认知障碍的主要影响因素. 学生的认知发展水平与原有知识与经验及教师因素会影响学生正确概念意象的建立. 学生学习的“高”认知负荷是导致学生概念表征与解释障碍、抽象数学符号或语言理解障碍及关联障碍的重要因素. 学生学习的认知负荷会受到多种因素的影响, 其中有学生的认知发展水平、原有知识与经验这些内在因素, 也有学习材料的特征和教师教学(对学习材料的选择、组织与呈现等)等外在因素.

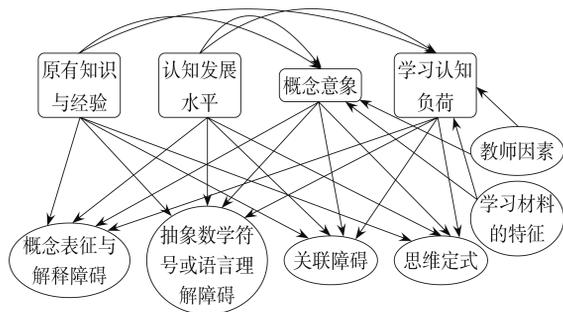


图3

四、研究建议

根据以上研究结论, 本研究对教师的概念教学提出如下建议.

(一) 要了解学生的概念意象

一方面, 教师在教学准备阶段要切实做好学情分析. 学情分析中要重点关注不同学生所持有的概念意象, 并对导致学生形成这些概念意象的因素进行分析. 另一方面, 在学生获得数学概念之后, 教师需要为他们创设“输出”概念(意象)的机会, 以便及时了解学生新形成的概念意象或原有概念意象的发展情况, 从而更加有效地调整教学, 为促进学生的概念理解而努力.

(二) 要引导学生正确理解概念的本质

在教学过程中, 教师要创设恰当的教学情境, 让学生在经历数学活动的过程中逐步完成概念的构建, 理解概念的本质及其蕴含的数学思想方法, 而不是仅仅教给学生一些程序性的操作方法或者以教师的理解代替学生的理解.

(三) 要关注并有效控制学生学习的认知负荷

一方面, 在充分做好学情分析的基础上, 教师不

仅要关注数学概念本身与相关学习资源可能引发的认知负荷的大小, 而且要有效控制教学过程中因教师对教学材料的组织与呈现等可能引发的外在认知负荷. 另一方面, 在学生理解数学概念本质的基础上, 还要注重引导学生建立概念内部、概念与其他概念或知识之间的有效关联, 形成概念图式. 长时记忆系统中正确而丰富的概念图式, 能够有效降低学生学习的认知负荷, 促进学生对概念的正确理解.

(四) 要提升自身对数学概念的理解水平

教师对数学概念理解准确与否、概念意象与概念定义是否一致等, 将直接影响其概念教学的准确性, 进而影响学生对概念的理解. 因此, 教师应该提升自身对数学概念等学科知识的理解水平, 纠正先前所形成的不正确的概念意象等, 为学生正确概念意象的形成奠定基础.

参考文献:

[1] 梁宗巨, 王青建, 张宏安. 世界数学通史: 下册[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2004.  
 [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.  
 [3] 鲍建生, 周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海: 上海教育出版社, 2009.  
 [4] 张奠宙, 李士锜, 李俊. 数学教育学导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.  
 [5] 李善良. 现代认知观下的数学概念学习与教学理论研究[D]. 南京: 南京师范大学, 2002.  
 [6] 曹才翰, 章建跃. 数学教育心理学(第二版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2006.  
 [7] 吴有昌. 提升中学数学教学质量的评价: 基于SOLO分类法的研究[M]. 北京: 科学出版社, 2018.  
 [8] 奥苏伯尔. 教育心理学: 认知观点[M]. 余星南, 宋钧, 译. 北京: 人民教育出版社, 1994.

【作者简介】马淑杰(1976 - ), 女, 北京学校正高级教师, 主要从事数学学习心理与高中数学教学研究; 陈福印(1976 - ), 男, 中国人民大学附属中学通州校区高级教师, 主要从事中学数学教学研究; 张景斌(1956 - ), 女, 首都师范大学教师教育学院教授, 主要从事数学教育、教师教育研究.

【原文出处】《中国数学教育》: 高中版(沈阳), 2024.1.27~32

【基金项目】北京市教育科学“十三五”规划2020年度重点课题——指向育人价值的高中数学概念教学研究(CDAA2020053).