【解题教学】

指向深度学习的高中数学解题教学策略

杨　培

【摘　要】文章概述深度学习的内涵,提出深度解题教学的操作步骤:分析教学内容、设置学习任务、分解学习任务、反思学习过程、设计学习评价,探讨以问题递变、研究方法、知识属性为主线组织教学的三种解题教学策略.

【关键词】深度学习;深度教学;解题教学;教学策略

解题教学是数学教学的重要组成部分之一,它不仅有助于学生巩固知识与方法,还有助于学生构建良好的认知体系,培养学生的高阶思维能力,促进深度学习达成.目前,解题教学还存在较多问题,比如教学内容偏重技巧,忽略知识联系的思考过程,不利于学生良好思维习惯的培养;又如教学活动重学轻得,忽略过程性知识的教学,缺乏对数学活动经验的积累;再如教学目标浮于表面,忽略题目间的联系,导致学习处于知识方法的机械式训练.本文以深度学习理论为基础,结合笔者教育教学思考,提出指向深度学习的高中数学解题教学策略,以期破解当前解题教学存在的问题.

一、从“深度学习”到“深度教学”

(一)“深度学习”的基本内涵

国内关于深度学习概念的界定多以安富海和郭华的深度学习定义为基础.安富海认为:深度学习是一种基于理解的学习,是指学习者以高阶思维的发展和实际问题的解决为目标,以整合的知识为内容,积极主动地、批判性地学习新的知识和思想,并将它们融入原有的认知结构中,且能将已有的知识迁移到新的情境中的一种学习[1].郭华认为:深度学习指在教师引领下,学生围绕着具有挑战性的学习主题,全身心地积极参与、体验成功、获得发展的有意义的学习过程[2].

纵观上述表述,不难发现深度学习的基本内涵既包含学习过程,也包含学习结果,二者是一个有机整体,即通过围绕挑战性任务,运用联系的观点构建完整的学习路线,促进学习者经历由浅层学习到深度学习的过程,积累活动经验,完善认知结构,实现深度学习能力的提升,从“学会”到“会学”.

(二)“深度教学”的操作步骤

深度教学的“深度”内涵与深度学习的“深度”内涵一致.深度教学是超越具体知识与技能,触及学科本质和规律,提升学生思维品质,帮助学生学会学习的教学.深度教学需要教师跳出仅以知识与技能为教学目标的局限,追求更高层次的教学目标,促进学生能力提升、精神成长.

为了提高数学深度解题教学的可操作性,笔者借鉴郑毓信提出的深度教学四环节——联系、问题引领、交流和互动、学会学习[3],于然、赵世恩提出的深度教学五步骤——布置学习任务、主动探究并激活知识元、获取数学本质、巩固知识元之间的联系、总结学习过程[4],提出数学深度解题教学具体操作步骤如下:分析教学内容、设置学习任务、分解学习任务、反思学习过程、设计学习评价(各步骤具体实施要点如下页表1所示).

二、向“深度学习”的高中数学解题教学策略

解题教学因学习阶段不同大致可分为新授课阶段、章末阶段和复习阶段,根据不同阶段解题教学的特点,结合上述深度教学操作步骤,笔者提出三种解题教学策略.

(一)策略一:以“问题递变”为主线组织教学

数学问题的发展总是由简单到复杂,问题递变是数学问题从提出到发展的方式方法,可以遵循构建认知结构的规律,按照“简单⇌复杂”或“低维⇌高维”的逻辑顺序分析“原始问题”与“目标问题”的联结点、突破点等.以问题递变为主线组织教学,是指以“原始问题”与“目标问题”之间的问题递变过程的发现为教学内容,将能从“原始问题”变化而来的较为复杂的数学问题组织起来进行教学,更适合新授课阶段.

表1 数学深度解题教学操作步骤

操作步骤	实施要点
分析教学内容	显性教学内容:基本技能. 隐性教学内容:研究方法、活动经验、思想方法等.
设置学习任务	任务设置要求:符合教学目标要求,具有挑战性或综合性,选定的题目具有代表性. 任务题目数量:1道题目或1组(多道)题目.
分解学习任务	任务分解方法:设计具有启发性、联系性的问题链. 教学实施要求:遵循从知识“同化”到知识“顺应”的学习过程,注重认知结构的构建.
反思学习过程	学习反思内容:总结问题解决全过程,提炼问题解决的一般策略. 学习反思目的:搭建交流与互动学习平台,推动学生从“学会”到“会学”.
设计学习评价	评价设计理论:SOLO分类理论(SOLO思维水平划分界定标准参照文[5]).评价设计原则:与教学目标适配,与课堂教学匹配,设计思维水平处于浅层学习的习题(SOLO思维水平U,M)和深层学习的习题(SOLO思维水平R,E),给不同数学基础、思维层次的学生提供不同的学习素材.

案例1 分式函数的最值.

分析教学内容 $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$是一类常见的分式函数,该函数模型可以由函数$y=mx+\dfrac{n}{x}$通过通分运算、平移、换元等方式形成.求解函数$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$的最值需要将其转化为与函数$y=mx+\dfrac{n}{x}$有关的最值问题.

设置学习任务 求$y=\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-2}(x>\sqrt{2})$的最小值.

分解学习任务 问题1:思考与函数$\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-2}(x>\sqrt{2})$的结构相似的最简函数模型结构.

问题2:观察函数$y=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$递变为函数$y=\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-2}(x>\sqrt{2})$的过程,找出问题的联结点.

递变过程:$y=x+\dfrac{1}{x}\rightarrow y=x-2+\dfrac{1}{x-2}\rightarrow y=x+\dfrac{1}{x-2}\rightarrow y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}\rightarrow y=\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-2}$.

问题3:如何将函数$y=\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-2}(x>\sqrt{2})$转化为最简函数模型?

问题1重在引导学生用联系的观点思考与函数$y=\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-2}$联系紧密的函数模型$y=mx+\dfrac{n}{x}$,找到解决问题的突破点.问题2呈现由简单到复杂的问题递变过程,培养学生思考“原始问题”与“目标问题”之间关系的习惯,挖掘换元、平移、通分等递变联结点,为解题方法的学习做好铺垫.问题3在问题1和问题2的基础上,引导学生利用换元、拆分进行问题转化,掌握解决问题的方法.

反思学习过程 回顾解题方法产生的过程,将新的分式函数模型纳入原有分式函数的认知结构中,向前能追溯问题产生的过程,向后能根据递变方式产生新的数学问题.同时,深化对递变方式蕴含的解决问题的突破点的深层理解.

设计学习评价 如表2所示,评价设计以题目1巩固基本技能,以题目2、题目3强化递变方法,以题目4培养学生提出问题的能力,促进学生发展.

表2

评价内容	SOLO思维水平
题目1:求$y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+1}(x>-1)$的最小值.	M
题目2:求$y=\dfrac{x-1}{x^2+1}(x>1)$的最大值.	M
题目3:求$y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x+1}(x>2)$的最小值.	R
题目4:根据课堂学习的递变方法,设计一个更复杂的分式函数最值问题.	E

案例1的教学,先通过广泛联系的思考找到学生解决问题的最近发展区,再呈现由简单到复杂的递变过程,最后探寻由复杂向简单转化的解决方法.这一学习过程,通过问题发展的“来路”引导学生找到问题解决的“回路”,能有效破除单纯技巧学习的弊端,促进深度学习的实现.

(二)策略二:以“研究方法”为主线组织教学

数学研究方法指“背景要概念要性质要结构要应用”这一数学研究路径,其体现了知识发展逻辑,能用来分析数学问题的形成方式.以研究方法为主线组织教学,是指以某类数学对象的研究方法为教学内容,将能体现该研究方法的数学内容组织起来进行教学,更适合章末阶段.

案例2 复杂函数的性质.

分析教学内容 复杂函数和复合函数是两类初

等函数,复杂函数的形成蕴含着用加、减、乘、除等运算观点构造函数的方法,使得复杂函数的性质研究可以转化为简单函数的性质研究,这也是数学研究方法所蕴含的数学思想方法. 此外,函数性质的研究一般从函数图象的研究开始.

设置学习任务 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论:①$f(x)$ 是偶函数;②$f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内单调递增;③$f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 内有 4 个零点;④$f(x)$ 的最大值为 2. 这些结论中正确的编号是__________.

分解学习任务 问题 1:问题求解需要应用哪些知识或方法? 说一说你的解题策略?

问题 2:研究函数性质的一般路径是什么?

问题 3:函数 $f(x)$ 由哪两个函数构成? 你能用这两个函数研究 $f(x)$ 的图象与性质吗?

问题 4:从研究方法和知识应用两个角度说一说问题求解方法的特点.

问题 1 重在探讨解题视角,一是直接应用奇偶性、单调性、正弦函数性质等知识,逐个判断结论;二是应用函数研究方法进行整体求解. 问题 2 用于回顾研究函数的一般方法:概念要图象要性质要应用. 问题 3 用于回顾用运算观点构造函数的方法,引导学生用运算眼光阅读函数,通过函数 $y=\sin|x|$ 和 $y=|\sin x|$ 图象的叠加研究 $f(x)$ 的图象,再通过观察图象逐个判断结论. 其中,研究 $y=\sin|x|$ 和 $y=|\sin x|$ 图象时需要应用图象变换等方法. 问题 4 用于引导学生思考辨析,体会隐藏在知识学习过程中的研究方法的思维价值.

反思学习过程 回顾解题方法与函数研究方法的一致性,将函数研究方法作为隐性知识整合引入函数认知结构,掌握运用运算眼光阅读函数的方法,以及运用运算方式研究函数图象与性质的方法,形成"函数模型 $\xrightarrow{\text{从运算、变换等观点阅读函数性质}}$ 运算性质 $\xrightarrow{\text{画出函数图象}}$ 应用性质"的一般解题策略,深层次理解解题方法蕴含的数学研究方法.

设计学习评价 如表 3 所示,评价设计以题目 1、题目 2、题目 3 巩固研究方法,题目 1 的函数对象与课堂教学一致,题目 2 的函数对象需要良好的函数模型意识;题目 3 的函数对象需要经过图象分析、平移、换元等方法进行问题转化. 三道题目的研究对象的复杂程度逐渐加深.

案例 2 的教学挖掘出研究函数的一般方法,回归数学本质,将不同类型的复杂函数的性质研究统一起来,形成一般解题策略. 这一学习过程,通过挖掘隐性知识的应用价值,能有效跳出单纯应用知识解决问题的学习局限,突出过程性知识的重要性,积累数学基本活动经验,推动深度学习的达成.

表 3

评价内容	SOLO 思维水平
题目 1:若函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$ 的最大值为 2, 则常数 φ 的一个取值为__________.	M
题目 2:若函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点,则 $a=$__________.	R
题目 3:若函数 $f(x)=(1-x^2)\cdot(x^2+ax+b)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称,则 $f(x)$ 的最大值是__________.	E

(三)策略三:以"知识属性"为主线组织教学

一类数学对象有不同的知识属性,对不同知识属性的理解,会产生不同的解题方法,将同一类数学对象的所有知识属性梳理出来形成整体理解,可以从整体教学的观点出发进行教学. 以知识属性为主线组织教学,是指以知识属性的思维框架的构建为教学目标,将同一类数学对象的不同知识属性整合起来进行教学,更适合复习阶段.

案例 3 平面向量的综合应用.

分析教学内容平面向量既有大小又有方向,具有平面几何、抽象向量、坐标向量等三种知识属性,除去直接应用概念与公式解决问题外,平面向量的基础问题、综合问题都可以从平面几何、抽象向量、坐标向量等三个角度进行思考,探寻解题思路.

设置学习任务 任务设置包括线性运算、模长、数量积等常见问题,都可以从平面几何、抽象向量、坐标向量等三个角度进行求解,为思维框架的构建做好基础.

任务 1:在△ABC 中,AD 为 BC 边上的中线,E 为 AD 的中点,则 $\overrightarrow{EB}=$( )

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

任务 2:设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$,则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$__________.

任务 3:已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2,E 为 CD 的中点,则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=$__________.

任务 4:已知向量 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$,$|\overrightarrow{OA}|=3$,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$__________.

分解学习任务 问题1:上述四个任务的典型求解方法分别是什么?应用了哪些向量知识?知识属性是什么?

问题2:你能从其他知识属性的角度来求解上述任务吗?

问题3:根据上述任务的学习过程,你能整合提炼出平面向量综合问题的一般解决策略吗?

问题1重在从"一题一法"的角度复习回顾基本技能,提炼出三种知识属性的思考方向,初步构建思维框架.任务1指向抽象向量视角的用基底表示向量;任务2指向抽象向量视角的公式应用;任务3指向坐标向量视角的数量积运算;任务4指向平面几何视角的数量积几何意义应用.问题2组织学生从三种不同的角度重新思考四个任务的求解方法,经历发散思考的过程,将四个任务从思维框架的视角统一起来.问题3引导学生从"一题一法"到"多题一思维框架",培养学生整体观念下的系统思维.

反思学习过程 回顾从解题方法到思维框架构建的全过程,将平面向量的知识属性作为问题解决方法的思考起点,强化同一类数学对象不同视角下理解的整体观念,优化原有认知结构,形成"先作图分析,再从平面几何、抽象向量、坐标向量等三个思考方向探究问题解决方法"的一般策略,深层次把握不同问题底层思维逻辑的一致性.

设计学习评价 如表4所示,评价设计以题目1、题目2巩固基本技能;题目3提高要求,重在巩固思维框架;题目4拓展至动态问题的研究,检测学生迁移应用思维框架的能力.此外,题目与任务的平面几何、坐标向量的思考视角配合了特殊与一般的思想方法,虽然图形特殊化的四个题目的数学情境的复杂程度不断加深,但都可以应用思维框架探寻解法.

表4

评价内容	SOLO 思维水平
题目1:设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点,O 为平行四边形 $ABCD$ 所在平面内任意一点,若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OM}$,则 $\lambda=$________.	M
题目2:已知向量 a,b 的夹角为 $60°$,$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=2$,$\lvert\boldsymbol{b}\rvert=1$,则 $\lvert\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rvert=$________.	M
题目3:已知 P 是边长为2的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是________.(要求:三个知识属性视角的方法都要做)	R
题目4:在矩形 $ABCD$ 中,$AB=1$,$AD=2$,动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上.若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$,则 $\lambda+\mu$ 的最大值为________.	E

案例3的教学紧扣平面向量的知识属性,把握数学对象的本质联系,将不同问题的思考方法整合起来,形成研究平面向量问题的思维框架.这一学习过程,通过挖掘数学对象的知识属性,学生能有效跳出就题论题、就方法论方法的浅层学习;突出知识、题目之间的联系性、融通性,能养成学生数学思考的良好习惯,促进深度学习发生.

三、结语

数学深度解题教学的目标是学生能够在解题学习过程中,自觉思考"目标问题"与"原始问题"之间的关系,自主挖掘"目标问题"所蕴含的数学研究方法,主动构建"目标问题"知识属性的思维框架,不断完善、优化自身认知结构,利用数学思维思考问题,最终由"学会"走向"会学".上述所讨论的数学深度解题教学操作步骤下的三种教学策略分别体现了三个不同学习阶段的深度学习:在新授课阶段,以"问题递变"为主线组织教学,引导学生广泛联系与纵深思考,促进"深度"学习;在章末阶段,以"研究方法"为主线组织教学,引导学生深入理解数学知识,融合零散的知识,促进"广度"学习;在复习阶段,以"知识属性"为主线组织教学,培养学生发散思维,形成思维框架,促进"贯通度"学习.总之,数学教师需要通过数学解题教学以深刻的思想启迪学生,更好地促进深度学习的发生.

参考文献:

[1]安富海.促进深度学习的课堂教学策略研究[J].课程·教材·教法,2014,34(11):57-62.

[2]郭华.深度学习及其意义[J].课程·教材·教法,2016,36(11):43-51.

[3]郑毓信."数学深度教学"的理论与实践[J].数学教育学报,2019,28(5):24-32.

[4]于然,赵世恩.深度学习的内涵与教学实践——以小学数学为例[J].数学教育学报,2021,30(1):68-73.

[5]于涛,薛新建.基于SOLO分类理论的高考函数与导数模块研究——以全国Ⅰ卷(理科)和新高考卷为例[J].数学通报,2022,61(5):46-51.

【作者简介】杨培(1971-),重庆市求精中学校,中学高级教师,本科学历,长期从事高中数学教学和研究工作(400015).

【原文出处】《数学教学通讯》(重庆),2024.3下.7~10