高中数学教与学 2024.6
SENIOR HIGH SCHOOL EDUCATION:MATHS TEACHING AND LEARNING

【命题研究】

数学试题的创新性命制

杨元韡

【摘 要】通过对以三角函数、解三角形等知识为载体的一些试题进行改编,给出数学试题创新性命制的几种常见途径:设置新颖的问题情境,嵌入适当的逻辑推理,融合多元的知识方法,设计灵活的探究问题,拟定结构不良的题目等.

【关键词】高中数学;试题命制;创新性;三角函数;解三角形

为进一步深化高考考试内容改革,也为更好地选拔创新型人才,教育部考试中心于2020年1月发布了《中国高考评价体系》(以下简称"高考评价体系").高考评价体系是教育评价的理论和实践体系,也是高考命题、阅卷的重要依据.针对高考"如何考"的问题,高考评价体系明确提出了"四翼"的考查要求,即"基础性、综合性、应用性、创新性".

创新性考查要求是对标准化测验中如何考查创新品质的探索:通过命题创新,努力破除传统标准化测验忽视创新品质考查的弊端.在数学考试中,考查的核心在于数学创新思维能力,即不受常规思维的束缚,勇于面对新问题,通过对知识、思想方法的迁移,灵活组合运用,有效解决问题的能力.为此,需要在命题时,努力增强试题的创新性.本文主要谈一谈笔者对高中数学试题创新性命制的实践探索.

一、设置新颖的问题情境

数学试题常见的情境包括数学情境、科学情境、现实情境等,所呈现的信息具有多元性.设置新颖的问题情境,可以尽可能保证测试的公平性,有效地测试考生对信息进行阅读与理解、处理与加工,并准确连接到已有知识结构中具体的知识和技能的水平.当然,设置情境还需要综合考量.尤其是设置新颖的情境时,要注意科学、可信,有适当的信息量和深度,避免出现刻意的干扰信息,契合考生的认知水平,能积极引导考生作出与测量目标或行为目标一致的应答.

【案例1】

原题: 如图1,在平面四边形 $ABCD$ 中,$AD=BD$,$\angle ADB=90°$,$CD=2\sqrt{2}$,$BC=2$.

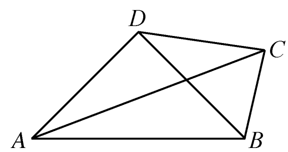

图1

(1)若 $\angle BDC=45°$,求线段 AC 的长;

(2)求线段 AC 长的最大值.

原题两问的求解目标重复,第(2)问是第(1)问的一般化(需要先用参数表示 AC 的长,再其求最值).而且,第(2)问的难度整体偏大,比如:如何引入合适的参数?选边还是角?选两边夹角还是一边对角?……在一次教研活动中,一位同事问:在一个解三角形问题的求解结果中,如果出现平面凹四边形的情况,要不要舍去?高中阶段,学生遇到的往往是平面凸四边形.笔者想到:何不以平面凸四边形为情境背景呢?

改编题: 若一个平面四边形对边不相交且任意三边都在第四条边所在直线的一侧,则称其为平面凸四边形.容易知道,与之等价的说法为:若一个平面四边形对边不相交且每个内角都小于 π,则称其为平面凸四边形.图2给出了两个不是平面凸四边形的例子.

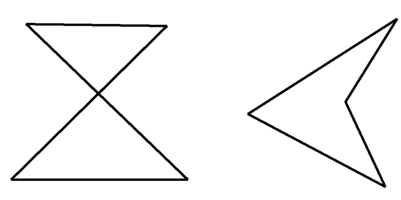
图2

如图3,在平面凸四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$,$BD\perp AD$,$CD=3$,$BC=2$,设 $\angle BCD=\theta$.

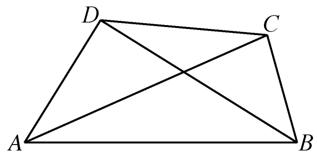

图3

(1)求 $\cos\theta$ 的取值范围;

(2)试用 θ 表示对角线 AC 的长,并指出 θ 取何值时 AC 的长最大.

除了数据的改编之外,这道改编题主要的创新之处有:(1)设置了数学情境.给出了平面凸四边形的两种定义以及两个反例,让考生在理解概念的基础上,根据问题要求,选择恰当的定义解决问题.选择定义的过程能体现考生对问题条件价值的甄别能力.(2)改变了两问的关系.从特殊与一般的关系改变为基础与进阶的关系,结构更加紧凑:第(1)问为第(2)问的解决提供了定义域,两问关联性很强.第(2)问还给出了参数,让考生更好地聚焦于寻找多个三角形的边角关系.

二、嵌入适当的逻辑推理

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》将"逻辑推理"定位为六大学科核心素养之一.华人几何学家伍鸿熙说过:"逻辑推理是数学的命根子."章建跃博士也说过:"运算是数学的童子功,推理是数学的命根子."可见逻辑推理在数学核心素养中的突出地位.实际上,逻辑推理是超越数学内容的更具有通识性的思维方式.命制或改编数学选择题时,可以尝试基于题型特征嵌入适当的逻辑推理,让考生运用同一律、排中率、矛盾律、充足理由律等逻辑推理的规则解决问题——其实,这也是近几年高考试题命制的重要趋势之一.

【案例2】

原题:(多项选择题)已知下列关于函数 $y=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的四个命题,其中正确的命题有( )

A.该函数图象的对称中心为 $\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},0\right)$($k\in\mathbf{Z}$)

B.该函数图象的对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$($k\in\mathbf{Z}$)

C.该函数在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right]$($k\in\mathbf{Z}$)上单调递减

D.该函数图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到一个奇函数的图象

根据函数解析式可以直接判断选项A、B、C的正误,利用图象平移的规则也很容易判断选项D的正误,因此,原题属于容易题.对此,如果将初相位 φ 设为参数,让考生根据图象等信息求参数 φ,则能更好地考查考生对初相位的理解,适当地提高试题的难度与区分度——其实,2021年"八省联考"数学卷第3题有类似的考查方式.

改编题:(单项选择题)已知下列关于函数 $y=\sin(2x+\varphi)$($\varphi\in\mathbf{R}$)的四个命题中有且仅有一个假命题,则假命题是 ( )

甲:该函数图象的一个对称中心为 $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$.

乙:该函数图象的一条对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{6}$.

丙:该函数在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递减.

丁:该函数图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到一个奇函数的图象.

A.甲 B.乙 C.丙 D.丁

这道改编题主要的创新之处是增加了对逻辑推理规则的考查,即对矛盾律(三个命题相容,与另一个不相容)和排中率(一个命题不可能既是真命题又是假命题)的考查.具体地,根据每一个选项都能求出 φ 的通解,关键是找到符合其中三个命题但不符合另一个命题的特解.事实上,只需要求出前三个选项中 φ 的通解,即可选出本题的答案.

三、融合多元的知识方法

如果将多元的知识与方法融合于一道试题,形成一个有机的整体,则能综合考查考生对相关的知识与方法体系的理解,达到"一题多用"的效果.利用这类试题进行测试,可以有效地甄别出具有扎实的基本知识、基本方法并且具备融会贯通能力的考生.这类试题的命制应根据考查目标和考查内容,先找准哪些知识或方法可以融合,然后对原始条件进行

变换,最后提出相应的设问.

【案例3】

原题:(1)已知 $4\sin\theta\cos\theta=3$,$\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,则 $\sin\theta+3\cos\theta=$________.

(2)已知 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$,$\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,则 $\sin\theta=$________.

2022—2023学年第二学期常州市教育学会学业水平监测高一数学卷(期中)的考查内容包括三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、复数等. 这些内容联系比较紧密,如何有机地整合这些内容来设计试题?笔者基于上述原题做了尝试. 关于"三角函数"的条件 $4\sin\theta\cos\theta=\sqrt{3}$(即 $\sin2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$),若与"平面向量"融合,可变为 $(2\sin\theta,1)\parallel(\sqrt{3},2\cos\theta)$ 或 $(2\sin\theta,1)\perp(2\cos\theta,-\sqrt{3})$;若与"复数"融合,可变为复数 $z_1=2\sin\theta-\sqrt{3}\mathrm{i}$,$z_2=1+(2\cos\theta)\mathrm{i}$,并且 z_1z_2 是实数……

改编题:已知复数 $z_1=2\sin\theta-\sqrt{3}\mathrm{i}$,$z_2=1+(2\cos\theta)\mathrm{i}$,$\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.

(1)若 z_1z_2 是实数,求 z_1z_2 的值;(2)设 z_1、z_2 对应的向量分别是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,若 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,求 $\sin\theta$ 的值.

这道改编题主要的创新之处有:考查了复数的分类、运算与几何意义,向量垂直的坐标表示,同角三角函数关系,和差角的三角函数公式等多种知识与方法;将同角的正弦、余弦的2倍分别设为两个复数的实部与虚部,以复数为背景,使试题的表述简洁明了. 对第(1)问,利用复数的乘法法则,即可转化为"已知 $z_1z_2=2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta+(4\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3})\mathrm{i}$ 是实数,求 z_1z_2 的值",因此,它实际上就是原题的第(1)问. 第(2)问的设计要实现原题的第(2)问的考查目标是有一些难度的,需要对两个向量式的系数不断试验与调整.

四、设计灵活的探究问题

"探究是认识事物的过程,即猜想问题答案、结论,发现命题的心理特征;是探究过程的发现意识与探究结果的创新表现的内在认识状态."[1]具有探究性的试题,往往有深刻性与隐藏性,其解题方法并不是显而易见的常规模式,需要考生具有敏锐的发现眼光、深刻的洞察能力,并且经历观察、操作、归纳、类比、假设、猜想(或联想)、检验、论证等多个过程. 命制灵活的探究性试题时,可以设置不完全归纳的素材情境,让考生观察发现其共性,提出猜想,再对猜想进行论证;可以设置非定向的问题,常见的形式如"某种情形(结果、取值等)是否存在?如果存在,求出相应的结果或取值;如果不存在,请说明理由"等;也可以提出解释的要求,即利用数学的原理、定理、公式等解释某种现象;还可以提出开放式举例的要求,如根据条件探究具有相关属性的例子等,常见于填空题,如写出一个同时满足若干条件的函数的解析式等.

【案例4】

原题:求证 $\sin^2\theta+\cos^2(\theta+30^\circ)+\sin\theta\cos(\theta+30^\circ)=\frac{3}{4}$.

原题主要考查三角恒等变换知识,考查逻辑推理能力,相对比较"单薄". 可以将其改编为需要经历观察、归纳、猜想、论证、联想等过程的综合性的探究问题.

改编题:观察各个等式.

$$\sin^2 30^\circ+\cos^2 60^\circ+\sin30^\circ\cos60^\circ=\frac{3}{4},$$

$$\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin20^\circ\cos50^\circ=\frac{3}{4},$$

$$\sin^2 15^\circ+\cos^2 45^\circ+\sin15^\circ\cos45^\circ=\frac{3}{4}.$$

(1)分析上述各式的共同特点,写出能反映一般规律的等式,并对等式的正确性作出证明;

(2)在三角形中,试给出(1)中等式的一种几何解释.

这道改编题主要的创新之处有:(1)增加归纳的过程. 不直接给出证明目标,而让考生通过特例归纳目标并证明,既考查观察与归纳的能力,又考查逻辑推理能力. (2)深挖问题的背景. 所证等式的结构非常像余弦定理的结构,但又不完全相同,考生需要展开联想才能发现:在 $\triangle ABC$ 中,设 $A=\theta$,$B=60^\circ-\theta$,

$C=120°$,且外接圆的直径为1,根据正弦定理,$a=\sin\theta$,$b=\sin(60°-\theta)$,$c=\sin120°$,再根据余弦定理,得到$a^2+b^2-2ab\cos C=c^2$,即$\sin^2\theta+\sin^2(60°-\theta)-2\sin\theta\sin(60°-\theta)\cos120°=\sin^2120°$,化简即得所证等式.第(2)问考查考生对类似学习内容(余弦定理)的联想与迁移能力,以及创造性地发现与提出问题、分析与解决问题的能力,同时能让考生体会三角函数与几何之间的统一之美.

五、拟定结构不良的题目

"与结构良好问题的解决过程相比,结构不良问题的解决过程,不再是一个纯认知的过程,需要个体将自己的认知、元认知、情感和意志融为一体,最大限度地展示人类智慧的复杂性和非线性特征,具有重要的育人价值."[2]结构不良问题带来的开放性,往往需要考生多角度思考问题,积极探索创新.命制结构不良的试题时,可以设计条件的不良性,如事先给出部分条件,再从给定的若干个条件中选择一个条件,组成完整的条件组,这就考查考生比较、分析并优选好的条件解决问题的能力;也可以设计目标的不良性,如给定条件,在可能的目标中选择一个加以证明或求解,甚至选择一个真命题(选择的过程又需要逻辑推理)加以证明等;还可以设计条件与目标的双重不良性,如从给定的3个(或更多)条件中选择2个(或更多)作为已知条件,将剩余的1个条件作为证明目标等.

【案例5】

原题:已知$\triangle ABC$中,角A、B、C所对的边分别为a、b、c,$\sin B\cos A>\sin C$.

(1)求证:B为钝角;

(2)若$\triangle ABC$满足$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$a=\sqrt{2}c=4$,求$\triangle ABC$的周长.

原题为结构良好的题目,对考生思维过程、实践能力和创新意识的考查略有不足.笔者改编时,尝试让考生对多个条件进行比较与分析,并选择合适的条件解决问题.

改编题:已知$\triangle ABC$中,角A、B、C所对的边分别为a、b、c,$\sin B\cos A>\sin C$.

(1)求证:B为钝角;

(2)假设$\triangle ABC$同时满足下列4个条件中的3个:①$\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$;②$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$;③$a=4$;④$c=2\sqrt{2}$.当选择的3个条件的序号为________时,$\triangle ABC$一定存在.求出此时$b$的值.

这道改编题主要的创新之处为:在第(2)问中设置结构不良的条件,让考生结合第(1)问的结果从4个条件中选出合适的3个条件,使$\triangle ABC$一定存在.考生应分析条件之间的矛盾性,从而选择合适的条件.如果随机地选择3个条件,可能会出现$\triangle ABC$不存在的情况.具体来说,可首先排除①②同时满足的情形,则可能的情形只有2种,即①③④或②③④.再验证①③④符合条件,可作答;而②③④不符合条件,应舍弃.在解答的过程中,因为条件是结构不良的,但是合适的选项只有一组,所以选择的过程又考查了逻辑推理能力.

本文主要通过对以三角函数、解三角形等知识为载体的一些试题进行改编,给出了增强数学试题创新性的几种常见途径.当然,相关的途径还有很多,值得教研人员和一线教师等尝试探索,不断地推陈出新,为创新型人才的早期发现与培养提供可能.

参考文献:

[1]于涵,任子朝,陈昂,等.新高考数学科考核目标与考查要求研究[J].课程·教材·教法,2018(6):21-26.

[2]刘加霞.通过"再创造"学习数学:"为何"与"何为"——《作为教育任务的数学》一书观点评述之二[J].教育研究与评论,2022(6):115-119.

【作者简介】杨元韡,江苏省常州高级中学(213003).

【原文出处】《教育研究与评论》:中学教育教学版(南京),2024.2.35~39

【基金项目】本文系江苏省中小学教学研究第十四期课题"核心素养视角下高中数学建模教学的教学实践研究"(编号:2021JY14L56);江苏省常州市教育科学"十四五"规划课题"新高考背景下的高中数学课堂情境教学实践研究"(编号:CJKL2022294)的阶段性研究成果.