

基于整体视角的数与运算一致性研究

——以“笔算两位数除以一位数(首位不能整除)”的教学为例

殷玲玲

【摘要】《义务教育数学课程标准(2022年版)》围绕“大概念教学”构建了主题教学,实现了教学内容结构化,将“数的认识”和“数的运算”两个主题整合为“数与运算”主题。文章基于这样的改革背景,围绕具体的教学案例,从创设运算情境通达运算意义;融通算理算法获得运算技能;感悟数与运算一致性,体会运算本质三个维度,基于整体视角理解数的概念和运算的意义,在教学实践中体现数与运算的一致性。

【关键词】小学数学;数学教学;教学整体视角;数与运算一致性

数学是研究数量关系和空间形式的科学。作为小学阶段核心素养的主要内容之一的运算能力,在历次的课程改革中,其培养与发展一直备受关注。运算能力是学生数学学习和研究的基本能力,更是学生数学思维的主要表现。《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称“新课标”)将原有的“数的认识”“数的运算”合并为“数与运算”,即“数的概念与运算的一致性”,这对数与运算的教学实践提出了新的要求。“数与运算”作为一个内容主题,突出了数学的本质,促使学生经历数学化的过程,最终形成核心素养。

一、创设运算情境,通达运算意义

“数与运算”是一个极其庞大的系统,“数的概念”涵盖了整数、分数和小数三种类型,“数的运算”则包含了加、减、乘、除四种运算。后者在运算过程中强调“理解算理,掌握算法”“感悟数的运算以及运

算之间的关系,体会数的运算本质上的一致性,形成运算能力和推理意识”。其中,“运算能力主要是指根据法则和运算律进行正确运算的能力”。

苏教版数学三年级上册第四单元“两、三位数除以一位数”内容较多、知识点分散,且与二年级所学的表内除法有着密切的逻辑关系,也为后续学习相关的除法计算储备知识。由图1可见,“笔算两位数除以一位数(首位不能整除)”在其中起着承上启下的作用,这节课内容既延续“整数除以一位数的口算”和“笔算两位数除以一位数(首位能整除)”的算理,也关联后续“两、三位数除以两位数”的算法。作为两位数除以一位数计算中较为复杂的一种,其整个教学过程体现了小学生是如何“理解算理,掌握算法”的。因此,从数与运算一致性的角度来看,“笔算两位数除以一位数(首位不能整除)”在小学“数与代数”的教学中具有一定的代表性。

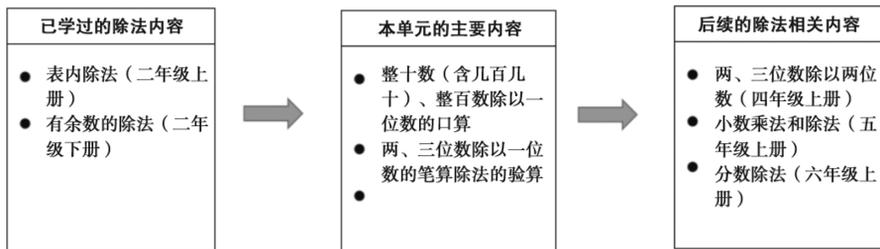


图1 教学内容前后关联

教学片段一:

新课标提出了“三会”的总目标,其中“会用数学的思维思考现实世界”就是要求学生“体会数学与生活之间的联系,在探索真实情境所蕴含的关系中,发现问题和提出问题”。本节课的导入兼具了复习铺垫和情境创设两种方式.在创设新授内容的运算情境之前,教师选择以整十数除以一位数的口算和两位数除以一位数的笔算两个具体的数学算式作为复习导入,一方面强化学生平均分和计数单位参与运算的意识,另一方面巩固除法笔算的模型,激活算法路径.这样一来,复习中运用到的算理和算法会很自然地迁移至新授内容中.随后,教师联系学生所熟悉的购物情境进行新课教学(如图2).

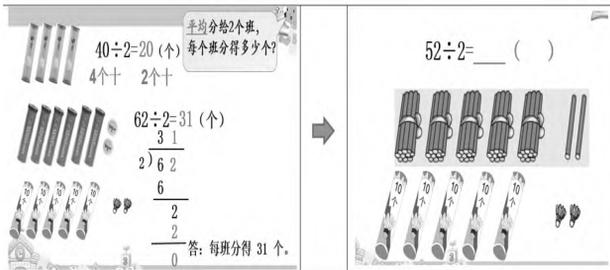


图2 情境创设

运算的情境设计多半会选择生活、科学、文化等相关要素,这些要素的整合与设计最终都是为了引出运算对象.教学中将要解决的数学问题建立在具体的情境之上,选择所需要的运算对象,实施计算教学.“笔算两位数除以一位数(首位不能整除)”的运算对象是“两位数”与“一位数”,运算对象主要涉及数位、位值、运算符号等.在创设运算情境自然地引出运算对象的同时,也有助于学生理解运算的意义.正如 Lesh 在论及有理数的表征转化模型时,提出“有理数概念以及有关的运算可以用现实情境、操作物、图像、口头语言、书面符号来表征”.本课的情境创设对于运算意义的理解体现在以下四个表征方式:

(1) 现实情境:把这些羽毛球,平均分给2个班,每班能分到多少个?(2) 语言表达:通过语言叙述表达如何列式,理解除法的意义,即52个羽毛球如何平均分成2份;(3) 实物操作:5捆、2根小棒分别代表5桶、2个羽毛球,52个羽毛球平均分成2份是多

少个;(4) 符号表达: $52 \div 2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

值得关注的是,创设运算情境虽然确实有助于学生理解运算问题,但是也有可能弱化学生对数学运算模型的理解,不利于学生抽象思维的培养.因此,教师设计了上述四种表征转换方法,帮助在学习中自如地从现实走向直观再回到抽象.运算对象基于现实情境,再被直观成小棒,小棒再被抽象成数,形成符号表达,帮助学生获得了对数和运算的理解.

本课教学的导入部分,以“购买球类”为主题,串联复习和新授两部分内容,但都是以生活实际为基础而创设的情境.一旦脱离现实情境,运算对象就失去了活力,运算也就变成了无源之水.

二、融通算理算法,获得运算技能

“数是对数量的抽象”,经历数量到数的形成,理解和掌握“数的概念”;“理解算理,掌握算法”,所谓算理就是计算的理论依据,属于陈述性知识,算法是计算的基本程序和方法,属于程序性知识;算理直观而算法抽象,算理是对算法的解释,算法是对运算的具体指导.在教学实践中,教师通常都会选择从“理解算理”过渡到“掌握算法”的教学方法.在这样的教学设计下,大部分学生似乎都能明白“怎样算”,但是对“为什么这样算”知之甚少.因此,教师要在关注算理与算法之间的密切关联之外,还要重视学生原有的知识水平,实施相对应的教学策略,实现算理与算法之间的自然过渡.

教学片段二:借助小棒,理解算理

教师:今天我们就来研究 $52 \div 2$ 这样的两位数除以一位数.老师为你们准备了像这样的小棒,这样的一捆表示一筒羽毛球,一根小棒表示一个羽毛球.(课件呈现)5筒2个羽毛球就可以用像这样的5捆2根小棒表示.

学生小组合作:研究如何把5捆2根小棒平均分成2份.

小棒在小学数学“数与代数”领域中一直扮演着重要角色,因此,三年级学生对于小棒的使用和操作经验十分丰富.在这里,“5捆2根小棒”对应着“5筒2个羽毛球”,既是实物代表,也包含了数的概念.分

小棒的过程实质上是基于操作与口算经验的联结。在“分”的环节中,离不开“算”,这一过程中的“算”是基于已有的口算经验,此经验处于学生的最近发展区。口算依据的是运算意义,对算理的理解是直观形象的。小棒操作则能够帮助学生形成分东西的表象,辅以已有口算经验的加工与建构,对于后续的“理解算理,掌握算法”是十分必要的。

然而学生在分小棒操作过程中,共同点都是先分整捆,取5捆中的4捆平均分成两份,每一份是2捆;但是在对剩下的“1捆2根小棒”进行操作的过程中,呈现出了两种不同的分法:方法一“将1捆小棒拆成10根,与剩下2根合并为12根小棒,平均分成两份,每份6根”;方法二“将1捆小棒拆成10根平均分成两份,每份5根,再将剩下的2根对应平均分入刚刚的‘5根之中’,这样每份依旧是6根”。两种操作方法对比之后,学生倾向于方法一,优化了分法。“分小棒”操作技能的习得、操作结果的获得,对于学生来说基本没有困难。无论是十个十个地分,还是十几个十几个地分,不一样的操作顺序,对应的竖式算法也不一致。学生在操作中抽象出算法,为理解算理打下基础。

“理解算理”的关键是“如何分12根小棒,即计数单位的细分”。学生在分小棒的操作过程中,形成与积累了操作经验,培养了操作思维,为竖式计算的学习打下基础。算法是基于计数单位的运算,这里的除法是减法的逆运算,实质就是减法的简便计算“同数连减”,凸显了数与运算的一致性。

教学片段三:简化过程,掌握算法

师:为什么 $5 \div 2$ 十位上是商2呢?

生1:5里面只有2个2。只分掉4个十,每份分得2个十,5减4等于1。

师:1表示什么?

生2:表示还有1捆没被分掉。剩下的这1捆表示的是1个十;余下的1个十怎么办?1个十和2个一合起来。

师:合起来是多少?

生3:是12个一,也就是12,所以要把这个2移下来。

师:同学们,写到这里,接下来该怎么算呢?请拿出作业单,老师提醒一下,只要完成 $52 \div 2$ 除法竖式计算部分。

生4:继续除以2,商6,每份又分得6根小棒;二十六十二,余数为0,表示全部分完,所以 $52 \div 2 = 26$ 。

教材的设计、教学的过程是循序渐进的。经历了之前的教学实践,学生对口算的思路和算法都是十分清晰的,小棒的操作更是激活了学生原有的竖式计算的体验。在笔算前,对于整十、整百、几百、几十的数的概念的认识是关键,学生形成了运用计数单位的运算习惯之后,更有助于迁移到之后的除法笔算中。口算经验的累积带来口算策略的完善,但是学生还是倾向于使用笔算。在教授除法竖式计算时,为了便于学生掌握除法运算的过程,教师会将总结出的“商—乘—减”是除法笔算的模型”直接交给学生,使学生获得简洁的除法竖式计算方法。这样的教学方式,一方面显示出相较于竖式计算的刻板;另一方面反倒对学生的口算能力要求更高。

即使在竖式计算的过程中,教师还是不断地关注竖式与分小棒操作的一一对应。尤其是分掉4个十,剩下的1个十和个位的2个一合成12个一,再把12个一平均分,体现在竖式上就是被除数十位上有余数“10”该如何处理。被除数余下的1个十,本来计数单位是“十”,将其分成较小的计数单位变为10个一,这样计数单位“一”的数量就得到了累加,再加上个位的2个一,就得到了12个一,这样才能够继续向下除。学生借助小棒操作和已有的平均分的意识,通过计数单位的细分,形成合理简洁的运算策略,化解了本节课的教学难点。

正如上文所述,整数除法的核心在于计数单位的细分,因此也可以从计数单位的角度表达:首先, $52 \div 2 = 52(\text{个}) \div 2 = 20(\text{个}) \cdots \cdots 12(\text{个})$,因为5(十)除以2不够除,所以把5(十)细分为50(个),再加上2(个),就够除了,于是计算 $52(\text{个}) - 20(\text{个}) \times 2 = 12(\text{个})$;其次, $12(\text{个}) \div 2 = 6(\text{个})$;最后根据两步运算之后,2(十)加上6(一),得到最终结果26。

在整个除法运算过程中,被除数总是不断地被

细分成不同的、更小的计数单位分别参与12个一的运算。相较而言,除数不需要进行细分,一直以整体参与运算。其实在后续的除法运算学习中,无论是整数除法,还是小数除法(转化为整数除法),其算法无非如此,并无新意。

新授教学完成之后,教师会设计相关练习进一步巩固知识的学习。回到除法竖式计算中(如图3),根据“商—乘—减”笔算的模型,注意商的位置不能写错,即除到哪一位商就商在哪一位上。如图3采用“□”这样结构化的方式,让学生借助笔算模型以直观方法巩固算理、内化算法,为之后脱离上述模型,实现独立完成除法竖式计算打下基础。在教学中,教师考虑到学生已具备一定的抽象思维和推理意识,就没有再回归到教材所提供的情境之中,而是借助小棒操作融合口算经验,支撑算法的习得和掌握。在理解算理之时,让学生初识算法。

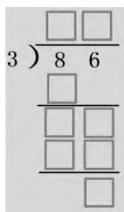


图3 算法过渡

三、感悟数与运算一致性,体会运算本质

新课标针对不同学段的“数与运算”的教学内容都有相对应的教学建议,立足整体视角理解数的概念,沟通运算的一致性,“感悟数的运算以及运算之间的关系,体会数的运算本质上的一致性,形成运算能力和推理意识”。

(一) 算理解析与算法归纳,感悟除法运算的本质

我国著名数学教育家陈重穆在《淡化形式,注重本质》一文中指出,“对名词、术语重点要放在学生对其实质的领悟上,不必在文字叙述上孜孜以求”。这里的“名词、术语”可以理解为陈述性知识,而“实质”应该是核心概念。除法计算教学中如何突破教学难点?首先,就是要把握与其相关的核心概念——平均分,是一种分物的思想,即“等分且分光”。除法计算教学必然围绕“平均分”而开展。其

次,追溯对数的运算的理解,除法是连减相同一个数的简便计算,理解除法与减法的关系;除法是乘法的逆运算,尤其在试商和调商的过程中,商和除数相乘等于被除数。

除法运算的本质是计数单位的不断细分,而整数除法运算的算理源自乘法分配律。如 $52 \div 2 = 26$,在学生学习了乘法运算律和分数除法之后,教师还可以这样表示运算过程: $52 \div 2 = (40 + 12) \div 2 = (40 + 12) \times \frac{1}{2} = 40 \times \frac{1}{2} + 12 \times \frac{1}{2} = 20 + 6 = 26$ 。三年级学生并没有正式学习过运算律的相关知识,这样的运算方法需要等到他们到了中高年级的时候去理解。

除法算理属于陈述性知识,解释“为什么这样算”:除法运算方法、竖式模型属于程序性知识,解释“怎样算”。只要学生掌握了除法竖式的算法模型“商—乘—减”,教师在课堂教学中不组织学生进行新授探究,直接告知,想必学生也会依靠简单地模仿完成竖式运算。即便是这种对算法程序化、浅层次的理解,也还是需要建立在“理解算理”的前提下,因为竖式笔算的过程也蕴含对算理的运用,即计数单位的细分。算理作为陈述性知识,多关于数与运算的基本原理、意义等,算法则是作为程序性知识,源自实践中不断地概括。结构化的竖式是对算理的运算过程的机械化、形式化。学生在遇到运算问题时,多半不会拘泥于抽象的算理,而是会根据实际情况压缩、简化这样的过程,如上述过程简约到只需要按步骤执行计算的程序。在计算教学中,算理固定、算法多样,教师要避免将算理直接告诉学生,要让学生在探索中完整经历算理的形成过程,在实践中自主构建算法、归纳算理。

(二) 直观与抽象融通,实现算理算法的一致性

“数与运算”是数与代数领域两大学习主题之一。“学段之间的内容相互关联,由浅入深,层层递进,螺旋上升,构成相对系统的知识结构。”数的认识是数的运算基础,数的运算有助于学生更好地认识数。

“数(shù)”来自“数(shǔ)”。在第一学段数的认

识中,教师常常会根据学情,创设学生熟悉的生活情境,借助经典学具小棒、圆片,通过“数(shǔ)”实现“计数单位的累加”,认识“数(shù)”学会数字表达。然而到了第二、第三学段,数的认识不再依赖于操作,更多地是来自图形、画图等方式,根据数的意义去认识数。学生在“数”与“形”之间切换,以“形”为手段认识“数”,将抽象的“数”化为直观的“形”,解决具体的数学问题。数的认识过程就是对数量的抽象的过程,从而促进数感的发展,促进符号和推理意识的形成。正如华罗庚所说:“数与形,本是相倚依,焉能分作两边飞。数缺形时少直觉,形少数时难入微。数形结合百般好,割裂分家万事非。”

弗赖登塔尔认为,“好的方法都强调计数”“运算的本质是计数”。如果脱离了具体的数,那计数单位是抽象的,然而教师借助数(shǔ)的方式认识了数(shù),也就有了计数单位存在的载体。计数单位参与到除法的运算中,每商一次,商都要小于或者等于9。数的认识与运算赋予了计数单位丰富的内涵。计数单位的累加使得出现了更大、更复杂的数,相同计数单位个数的累加或者递减形成运算的过程。操作的过程是具体的、直观的,看上去是动作技能的展现,实则反映了学生对抽象算法的认识,展现了从动作思维到抽象思维的过程。

“理解算理,掌握算法”要借助直观操作支撑对算理的理解,学生通过竖式计算揭示算法,积累了丰富的感性经验,归纳推理出算法。基于演绎推理,小数除法和分数除法也都是依据这个道理进行计算的。

(三)内化算理算法,发展运算能力的“一体两翼”

数的运算涉及三个概念:算理、算法、运算律。在具体的实操中,应该是从算法中归纳算理,再由算理推导运算律。然而,在教学实践中,一般是由运算律演绎出算理、算理推出算法,帮助学生形象地理解运算的算理,并辅以课件动态演示对应小棒实物操作,在直观演示和归纳概括中帮助学生内化算理和算法。

学生在进行算理和算法的理解之时,能够感知数学的道理,形成初步的推理意识。为此,教师还需要在教学中创设一些新的问题情境,让学生在解决实际问题中学会何时、何地、如何运用所学过的知识,内化算理算法。这些问题情境的创设既要有科学性也要有趣味性,有利于学生对运算对象的理解,从而灵活、快速地选择算法适用的条件。新运算问题的解决,一方面可以反映学生对算理算法的掌握情况,发展运算能力;另一方面也能帮助学生合理地辨析数学世界与现实世界的关联,发展数学思维。

学生运算能力的形成绝对不是一蹴而就的。回顾整个教学的过程,学生以口算为基础,借助“小棒”进行直观操作,揭示竖式计算的方法,完成对算理的理解。学生通过多样性的练习,积累丰富的感性经验,在此基础上内化算理算法,逐步形成运算技能。学生一旦拥有了关于除法运算的稳定的认知结构,并且根据新知的纳入不断对认知结构进行动态的调整,就能实现运算方法的迁移,从而让运算技巧转化为运算能力。

参考文献:

- [1] 巩子坤,史宁中,张丹.义务教育数学课程标准修订的新视角:数的概念与运算的一致性[J].课程·教材·教法,2022(6).
- [2] 巩子坤.程序性知识教与学研究——以义务教育阶段数学为例[J].课程·教材·教法,2014(4).
- [3] 李保臻,马登堂.基于小学生数学运算素养培育的课例比较研究——以“三位数乘两位数”的同课异构为例[J].数学教育学报,2021(2).
- [4] 孙兴华,马云鹏.为什么将“数与运算”整合为一个主题[J].小学数学教育,2022(6上).

【作者简介】殷玲玲,泰州学院教育科学学院。

【原文出处】《小学教学研究》:教学版(南昌),2024.1.33~36