初高中衔接教学实践对比研究

——以“函数图象的对称性”为例

吕 俊 龙艳文

【摘 要】目前,“三新”背景下的新高考,哪怕题目并不难,但只要是所谓的“新面孔”,很多学生就“招架不住”,不能灵活解决问题.日常学习中,学生仅学习所谓的解题技巧,而不重视知识的来龙去脉,对数学知识没有整体认识,很难提升自身的思维能力.教师要重视衔接教学,在每节课上密切观察学生的需要,紧跟学生的步伐,随时衔接教学,随时引导,这样才是真实有效的数学学习.

【关键词】初高中衔接教学;函数图象的对称性;对比研究

一、问题的提出

当前,很多教师的工作重点是搜集各地名校最新的试题编“学案”,而对中学数学的一些基本且重要的问题疏于思考;学生在考试中只要遇到“新面孔”,即使题目不难,也不能灵活解决问题.如此一来,自然导致很多学生抱怨“在数学上耗费大量的时间和精力,结果却收效甚微”.数学是多么美好的学科!一线教师应该反思,重视初高中衔接教学,从知

(三)重视素养培养的持续性

初高中数学教学衔接工作的意义在于构建贴近学生认知规律的可持续性认知路径,把数学教学的侧重点从学生已经完成的发展过程转移到正在形成或成熟的发展过程,以适应学生的发展为原则,将初高中内容进行贯通式梳理,使知识与思维以连续的姿态呈现在学生面前,进而了解学生习得某一数学知识和思维的最佳时期,并在该知识和思维形成时对学生施以最佳影响.例如,例1从“绝对值”这一知识点出发,揭示知识的内涵与本质;例2沿“双曲线图象”这一条“性质线”梳理,紧扣核心知识,变中求联,突出一般数学规律及蕴涵的思想方法;例3以“数形结合”这一个“思想面”建构,建立初高中数学思想的全局观,完善认知结构,挖掘学生数学素养的孕育点.

总之,作为高中数学一线教育工作者,需要充分认识到初高中数学衔接在数学育人方面的重要意义,力争做到把握学情,找准学生前期数学认知的发展规律;能够创设环境,营造新旧知识发生联系的适切场域;能够设计关联,提供学生发现问题、再造知识、锤炼思维的机会.应该说,初高中衔接的研究贯穿课程改革的整个过程,始终是一个与时俱进的课题,研究的推进、策略的优化以及方案的完善仍在路上,需要深入思考的问题不在少数.“道阻且长,行则将至”,相信随着持续的探索与调适,初中数学与高中数学的契合度将会日臻成熟,使数学教学成为一种贯穿过去、现在与将来的富有魅力的活动.

参考文献:

[1]何威,颜波.初高中数学衔接的回顾与展望[J].数学通讯,2023(3上):1-5,19.

[2]章建跃.高考复习备考如何回归教材(之二):从2024年高考综合改革适应性测试卷得到的启示[J].中小学数学(高中版),2024(1/2):封三,128.

[3]吕世虎,颜飞,锁建军,等.绝对值在中国数学课程中的历史演变[J].数学教育学报,2023,32(5):3-4.

[4]中国教育考试网.2024年高考综合改革适应性测试:数学试卷专家点评[EB/OL].(2024-01-19)[2024-04-03].https://www.neea.edu.cn/html1/report/2401/431.1.htm.

[5]涂荣豹.数学学习与数学迁移[J].数学教育学报,2006,15(4):1-5.

【作者简介】安恺凯(1990-),男,江苏无锡人,江苏省天一中学一级教师,研究方向:数学教育(江苏 无锡 214101);沈丹丹,无锡市东北塘中学(江苏 无锡 214191).

【原文出处】摘自《中学教研(数学)》(金华),2024.7.1~6

【基金项目】江苏省中小学教学研究第十四期立项课题(2021JY14XK16).

识的本源出发,创设合适的教学情境,帮助学生完成从初中到高中数学学习的过渡,包括知识与技能、方法与习惯、能力与态度等.

以“函数图象的对称性”教学为例,教师创设熟悉的问题情境,使学生在学习过程中体会理性思维的作用,帮助他们构建研究函数性质的整体思路,形成研究函数的基本框架.这就需要教学中体现数学逻辑的连贯性和思想方法的前后一致性,让学生对数学有整体性的认识,形成获取知识、解决问题的能力.

二、“函数图象的对称性”案例研究

(一)衔接课题的选择与分析

基于对初高中衔接教学的重视,由南京市高中数学教研室和鼓楼区初中数学教研室联合策划,精心组织了一次初高中数学衔接教学研讨活动,笔者主持的南京市“十四五”规划课题“新课程标准下初中、高中、大学数学衔接教学策略研究”课题组协办并全程参与了此次活动.活动分课堂教学和讲座两个环节,其中的课堂教学部分由一位初中教师和一位高中教师在同一个初三班级执教,她们带领学生分别从初中、高中不同的视角对同一个知识“函数图象的对称性”进行学习、再认识.两节课的主题和例题背景一样,教学目标不一样,两位教师从不同角度出发提出不同问题,此次活动笔者收获很多,思考很多,现整理成文以飨读者.

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》建议,“学习函数概念与性质可以帮助学生建立完整的函数概念,不仅把函数理解为刻画变量之间依赖关系的数学语言和工具,也把函数理解为实数集合之间的对应关系;能用代数运算和函数图象揭示函数的主要性质;在现实问题中,能利用函数构建模型,解决问题”.

由此,我们可以先引导学生从函数图象的几何直观等角度整体认识函数概念;通过梳理函数的单调性、周期性、奇偶性(对称性)、最大(小)值等认识函数的整体性质;经历运用函数解决实际问题的全过程.同时密切关注学生数学学科核心素养的提升,但是核心素养的提升不是一蹴而就的,它具有阶段性、连续性、整合性等特点.以本节课的教学为例,初中教学,我们着重从形到数认识函数图象对称的性质,带领学生继续从数的角度尝试用点的坐标关系表达对称性,并为高中学习做铺垫.高中教学将从初中的学习基础出发,以已经理解的用点的坐标表示对称性为依据,结合图形学习,用严谨的数学语言来证明函数图象的对称性,培养学生从直观想象到逻辑推理、数学抽象等核心素养的衔接与渗透.

笔者了解到很多学生进入高中阶段仍然不能很好地认识函数的对称性及函数的其他性质,尚停留在初中阶段的直观感受层面理解对称性;不会将其转化为数学语言,不会从代数角度来分析函数的性质,对于抽象函数的性质表达式的理解与应用更是困难,很多高三学生对解决抽象函数问题感到困惑,缺乏将抽象函数表达式与数学语言翻译以及几何直观意义相结合的能力.究其原因,就是学生对这部分知识的初高中衔接做得不够好,没有理解并掌握研究函数性质的一般方法,导致高中学习抽象函数性质时,死记硬背,无法灵活运用.因此,这样的衔接课研讨是很有必要的.

(二)教学实践对比及反思

本次活动的第一节课由初中的沈帅老师执教,第二节课由高中的张琪老师执教,我们来对比两节课的部分教学活动.

活动1:作出函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象,结合图象说一说它具有怎样的对称性?

初中教学:

首先教师向学生提问:初中如何研究函数图象的对称性?学生一致认为在初中阶段研究函数,是在平面直角坐标系中先通过列表、描点、连线作出该函数的图象,然后根据图象观察其对称性等性质.教师投影了几名学生的练习,并观察发现图象是关于原点呈中心对称的.

教师:直观看图象得到中心对称的结论,是否准确?能从中心对称的定义说说吗?

学生1:函数 $y=\frac{6}{x}$,当 $x>0$ 时其图象绕着原点旋转180°,可以与当 $x<0$ 时的函数图象重合,就说图象关于原点中心对称.

教师:你具体是怎么检验的?

学生1:我观察列表,看见图象上有点(2,3),也有点(-2,-3),它们这组点关于原点对称.

教师:这样的点还有吗?能不能将这些点一般化?

学生2:还有很多组,如(6,1),(-6,-1),而且应该有无数组.若 (a,b) 在图象上,那么 $(-a,-b)$ 也在图象上,它们关于原点对称.

高中教学:

首先作出函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象,然后仍从定义出发

证明,将图象绕原点旋转180°与它本身重合,就说明函数$y=\frac{6}{x}$的图象关于原点对称.

教师:这样利用定义,靠直接观察就能证明对称性吗?我们应该怎么转化?

学生3:我们上节课是取了几组点,证明了它们关于原点对称;我们也可以任取一点,证明其关于原点的对称点在图象上.

教师:为什么不能取几组?

学生4:因为其图象上有无数组点.

教师:那能不能说,我们取无数组点证明对称性,而不是取任意组点?

学生经过讨论得到结论:任意并不是无数,因为无数组只是多,并不代表所有的点,这里需要所有的点一个都不能漏,至此理解了"任取一点"的含义.

高中教学内容中经常要用到任意、无数、存在等量词,对于初三即将升入高中的学生要给予充足的时间去讨论、辨析,使其经历思考过程,而不是直接告诉学生结论,这样才能提升能力.

教师:下面请同学们写一下证明过程.

学生5:在$y=\frac{6}{x}$的图象上任取一点$A\left(a,\frac{6}{a}\right)$,它关于原点的对称点为$A'\left(-a,-\frac{6}{a}\right)$,下面验证$A'$也在这个图象上.

当$x=-a$时,代入$y=\frac{6}{x}$得$y=-\frac{6}{a}$,所以$A'\left(-a,-\frac{6}{a}\right)$在函数图象上,即$y=\frac{6}{x}$关于原点中心对称.

学生6:设图象上任意一点$A\left(a,\frac{6}{a}\right)$,则必有图象上一点$A'$的横坐标为$-a$,那么证明$A$和$A'$关于原点对称,就可以说明图象关于原点中心对称.

教师:两名同学谁对?为什么?

学生讨论后发现,两个证明的思路顺序虽然不同,但其本质是一样的,即都是将$x=-a$代入$y=\frac{6}{x}$,得$y=-\frac{6}{a}$.因此,我们可以引导学生用数学语言表达关于原点对称的函数的代数证明.

为了表达更方便,教师引入了高中表示函数对应关系的字母"f":如果在取值范围内任取x,都有$f(-x)=-f(x)$,那么函数图象关于原点对称.

笔者认为,此处初高中衔接体现在对定义的理解、翻译转化,旨在引导学生不能仅从观察图象、凭感觉判断函数图象关于原点对称,而是要回归中心对称的定义,分析该图象是否符合关于原点中心对称的定义,这个也是衔接教学的重要抓手.教师引导学生将函数对称性问题转化为图象上的点的对称问题,在这里将文字语言转化为数学语言及符号语言.引导学生对图象的研究不仅从形的角度进行观察,也可以从函数角度来研究,为后面高中所要学习的函数奇偶性证明埋下衔接的种子.

继续探究活动1:

初中教学:

教师:学生的学习单上还写了其他的对称性,能具体地说一说吗?

学生7:函数$y=\frac{6}{x}$的图象还关于$y=x$呈轴对称,也关于$y=-x$呈轴对称.

教师:很好,那怎么说明图象关于$y=x$呈轴对称呢?

学生8:首先从轴对称的定义来说,将图象沿着$y=x$折叠后能完全重合,就说明它是关于$y=x$轴对称的.另外,通过(2,3)与(3,2)关于$y=x$对称,再取很多组点,一般地,(a,b)与(b,a)也关于$y=x$对称.

教师:非常好!怎么证明你说的几组点关于$y=x$对称?

学生9:如图1,可以将$A(2,3)$和$A'(3,2)$分别与点$O(0,0)$联结,可知$|AO|=|A'O|$.再取点$M(1,1)$,同样将$A(2,3)$,$A'(3,2)$分别与点$M(1,1)$联结,易知$|AM|=|A'M|$,说明OM所在的直线$y=x$,就是AA'的中垂线.同理,一般地,(a,b)与(b,a)也关于$y=x$对称.

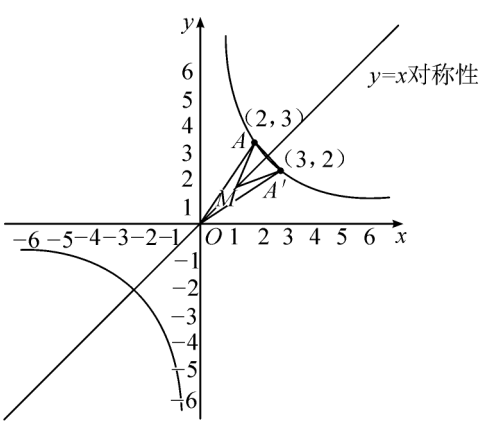

图1

学生10:还有一个对称轴,其图象关于$y=-x$对称,研究方法也一样.

笔者认为,初中教师对于图象关于$y=x$对称,

用了几何法证明,这也是对轴对称图象定义的一种解读,为学习高中的解析几何中“求解某点关于直线的对称点问题”埋下衔接的种子,继而对于图象关于某直线对称的问题,就可以用更一般化的代数法描述,即满足图象上的点(a,b)与(b,a)的中点在$y=x$上,连线斜率为-1即可. 很多高中教师并不知道学生在初中学习的这个知识点,于是在高中阶段教学时突然用两个方程求解,学生学得突然,忘得也快,不能灵活应用;如果高中教授点关于线的对称点时,学生能够主动回忆初中所学的轴对称的定义,以及几何法证明对称性,并翻译成数学语言,继而归纳为用方程组求解,学生就会在理解的基础上灵活运用.

此处反比例函数关于$y=\pm x$也具备对称性,这为高中研究双曲线的对称性及其渐近线奠定了基础. 学生进入高中学习双曲线时,可以以此节课的研究为基础,提出问题“反比例函数和双曲线有什么关系”,并深入探究. 其实很多高中模考题已经出现了此类衔接知识的影子.

活动2:尝试探究函数图象$y=|x|$的对称性.

学生很好地将活动1的学习经验运用到了活动2的探究,接着教师提出新问题.

教师:通过活动1和活动2,我们能不能总结一下,如果函数图象关于原点对称,或者关于y轴对称,那么函数图象上的点会有什么特征?(教师同时板书)

学生11:如果一个函数的图象关于原点对称,那么在图象上任取两个点,使它们的横坐标互为相反数,那么纵坐标也互为相反数;如果一个函数的图象关于y轴对称,在图象上任取两个点,使它们横坐标互为相反数,那么纵坐标相等.

笔者认为,此处学生的总结已经有了高中函数奇偶性定义的雏形,是一个很好的衔接点. 在活动1的讨论中,就已经有学生将函数图象对称问题转化为图象上的点的对称问题. 初中教师就可以引导学生从对称的定义出发,找到对称图象上的点的坐标关系,得到若点(a,b)在图象上,同时$(-a,-b)$也在图象上,那么图象关于原点对称;若点(a,b)在图象上,同时$(-a,b)$也在图象上,那么图象关于y轴对称. 高中阶段,若所学函数具备奇偶性,学生即可意识到定义域关于原点对称,且$f(-x)=\pm f(x)$.

学生如果在初中阶段不能将函数对称问题成功转化到图象上点的坐标关系,那么进入高中就很难理解用函数关系式表达对称性及其他函数性质. 如函数$y=f(x)$关于点(a,b)对称$\Leftrightarrow f(a+x)+f(a-x)=2b\Leftrightarrow f(2a+x)+f(-x)=2b$;函数$y=f(x)$关于$x=\frac{a+b}{2}$对称$\Leftrightarrow f(a+x)=f(b-x)\Leftrightarrow f(x)=f(b+a-x)$.

活动3:类比上述探究过程,请学生描述函数图象$y=x^2$,$y=x^3$的对称性.

学生很顺利地根据前面的探究画出了图象. 对函数表达式$y=x^2$的分析,若点(a,b)在函数图象上,则对应的点$(-a,b)$也在图象上,通过几个特殊点画出大致图象. $y=x^3$研究方法也一样.

在这里,对于函数$y=x^2$,$y=x^3$凹凸性的说明,初中教师可以与$y=x$的增长快慢相比,进入高中阶段,学生学习幂函数的图象时就与上述知识无缝衔接了.

因此,我们学习函数应当立足大单元视角,从初中到高中循序渐进,从不同角度来思考问题,从整体上理解和学习函数的性质.

活动4:请你设计一个函数的表达式,并探究该函数图象的对称性.

限于篇幅,此处略.

参考文献:

[1]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京:人民教育出版社,2020.

[2]卜以楼. 生长数学教学概论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,2022.

[3]侯新兰. 基于数学文化渗透视角的教学研究——以“探究函数$y=x+\frac{1}{x}$的图象与性质”为例[J]. 中学数学教学参考,2002(5):16-18.

[4]肖凌懿. 从直观感知到理性思考——有效地认识函数图象间的对称性[J]. 中国数学教育(高中版),2010(3):21-22.

[5]朱胜强. 为什么反比例函数的图象是双曲线[J]. 数学通报,2008(11):46-48,50.

【作者简介】吕俊,南京师范大学附属中学秦淮科技高中;龙艳文,南京市教学研究室.

【原文出处】摘自《中学数学教学参考》(西安),2024.5上.19~22

【基金项目】本文系南京市教育科学“十四五”规划课题“新课程标准下初中、高中、大学数学衔接教学策略研究”(L/2021/260)阶段性研究成果.