

小学生数学推理意识培养策略的实践研究

黄 蕾

【摘要】推理意识主要是指对逻辑推理过程及其意义的初步感悟。培养推理意识是学生建构数学知识体系的重要基石,为有效培养学生的推理意识,教师要充分重视数学推理教学的教育价值,通过从已知到未知、从猜想验证、从单一到多元、从思考到表达等培养策略,逐步提升学生的数学核心素养。

【关键词】推理意识;培养策略;小学数学;核心素养

史宁中教授指出,数学教学中的核心素养,是指具有数学基本特征的、适应个人终身发展和社会发展需要的人的思维品质与关键能力,主要包括数学抽象、逻辑推理、数学模型^[1]。《义务教育数学课程标准(2022年版)》把推理意识列为小学阶段核心素养的主要表现之一,培养推理意识成为学生数学知识体系建构的重要基石。

推理意识主要是指对逻辑推理过程及其意义的初步感悟。其主要表现为:知道可以从一些事实和命题出发,依据规则推出其他命题或结论;能够通过简单的归纳或类比,猜想或发现一些初步的结论;通过法则运用,体验数学从一般到特殊的论证过程;对自己及他人的问题解决过程给出合理解释^[2]。

为有效培养学生的推理意识,教师在教学中的可以通过创设引发猜想的情境,促使学生探究与发现,激发其推理需求;引导学生经历“仔细观察、大胆猜想、小心求证、运用论证”的推理思维全过程,丰富推理经验;通过对问题的深入思考分析和有理有据表达,提升学生的数学核心素养。

一、从已知到未知,激发推理需求

推理是由已知判断(前提)推出未知判断(结论)的思维。不难发现,对于一些概念、法则、公式等,有些学生已经通过其他途径有所了解,但基本没有经历过知识的探究过程,知其然而不知其所以然。这就要求教师基于学情,找准认知起点或认知冲突点,

通过创设有价值的问题情境,点燃学生的探索兴趣,激发其内在的推理需求,引领学生经历基于一些事实、经验提出猜想与假设,依据规则开展探究,从已知引向未知的过程。

例如,教学沪教版《数学》^①五年级第一学期“平行四边形的认识”时,教师先用表1复习长方形、正方形的特征,再回顾两者的关系。在此基础上,创设“用两条长方形透明色带交叠出四边形”的操作活动(见下页图1),学生观察并发现交叠出的四边形都是平行四边形。由此提出问题:为什么交叠出的四边形都是平行四边形呢?你能用学过的知识来说明理由吗?引导学生从已知的长方形对边平行这一特征展开推导,即因为四边形的两组对边分别是两个长方形的两组对边的一部分,长方形对边平行,所以交叠出的四边形的两组对边也分别平行。从而揭示概念:两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形。这个过程实现了从已知到未知的转化、从旧知到新知的迁移。

表1 长方形、正方形的特征

	边			角	
	对边平行	对边相等	四条边相等	对角相等	四个角相等
长方形	√	√		√	√
正方形	√	√	√	√	√

又如,在教学“平行四边形的面积”时,先让学生

合作探究:平行四边形的面积可以怎么求?再展示学生的两种不同方法(图2),引导其进行讨论和说理。

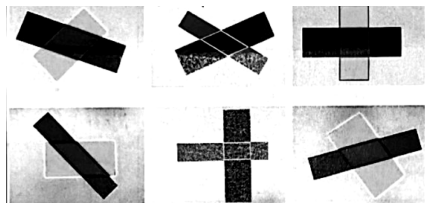
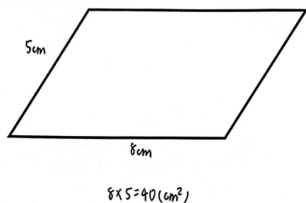


图1

方法1



方法2

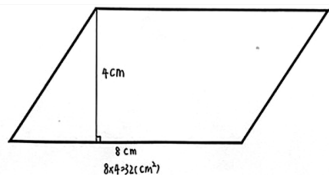


图2

生1:我同意方法1.因为长方形是特殊的平行四边形,长方形的面积等于长乘宽,那么平行四边形的面积也是长乘宽,也就是把相邻的边相乘。

生2:我也同意方法1.如果我把平行四边形“拉”成长方形,长方形长8cm,宽5cm,长乘宽等于 40cm^2 ,也就是这个平行四边形的面积。

生3:我不同意方法1.我用方格纸来数这个平行四边形的面积(图3),先数整格有26格,再将不满整格的两两相拼,能拼出6个整格, $26+6=32$ (格)。所以,平行四边形的面积是 32cm^2 ,方法2的答案才是对的。

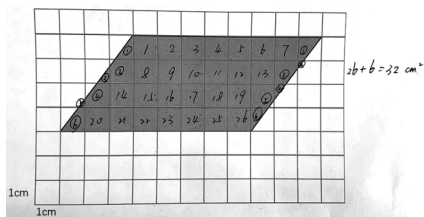


图3

生4:我也不同意方法1.把平行四边形“拉”成长方形,边的长度没变,但面积变了,所以不能用“ 8×5 ”计算。

教师适时地用多媒体演示平行四边形的面积发生变化的过程,让学生明白用邻边相乘求平行四边形的面积是错误的。

生5:我认为方法2是对的.如果沿着这条高剪开,再把左边的三角形拼到右边,形成一个长方形,这个长方形的面积与原来平行四边形的面积相等.这个长方形的长是原来平行四边形的底,宽是原来平行四边形的高,所以用“ 8×4 ”就能求出平行四边形的面积。

学生根据已有长方形的面积公式进行类比推理,最先想到用相邻两边的长度相乘得到面积.但通过数格子、多媒体动态演示的直观方法证明了用邻边相乘求平行四边形的面积是错误的.这时,学生就会产生认知冲突并形成新的猜测:用底乘高求平行四边形的面积可以吗?这一猜测激发学生的求知欲,使学生的推理需求更为迫切,推理的意识被唤醒;同时,因为有了失败的经验,学生的验证和说理过程会更为严谨。

二、从猜想到验证,经历推理过程

猜想和验证对推理意识的培养至关重要.研究表明,有效的推理教学并不是自然而然发生的,需要教师有意识地创设情境,鼓励学生通过观察、实验、归纳、类比等方法获得数学猜想,并能进一步寻求证据,运用数学工具细致地验证,经历推理的全过程,从而抽象、归纳出一些初步的规律和结论。

例如,在教学四年级第二学期“小数的性质”时,教师先鼓励学生大胆猜想:0.3和0.30哪个大?当学生凭借直觉得到 $0.3=0.30$ 时,教师不急于给出判断,而是引导学生小心验证,经历推理的全过程.学生先运用数射线、分数模型、计数单位、单位换算等已有的知识和数学模型,有理有据地分析、验证猜想的正确性;再通过举更多例子并说理,经历由特殊事实到一般原理的抽象过程,最后归纳出小数的性质就水到渠成了。

又如,在教学四年级第二学期“相等的角”时,教

师创设游戏情境:限时 10 秒,画出一个与 $\angle 1$ 相等的角 $\angle 2$ 。大部分学生想先量出 $\angle 1$ 的度数后再画 $\angle 2$,但 10 秒的时间明显不够;个别学生通过反向延长 $\angle 1$ 的两条边画出了 $\angle 2$ (图 4)。有学生质疑:这样画出的 $\angle 2$ 与 $\angle 1$ 相等吗?

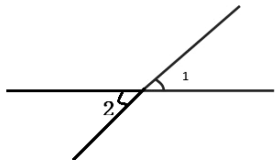


图 4

方法 1:度量验证。

生 1:我用量角器测量了 $\angle 1$ 和 $\angle 2$,都是 58° ,所以 $\angle 1 = \angle 2$ 。

生 2:我量出 $\angle 1 = 59^\circ$, $\angle 2 = 58^\circ$, $\angle 1 \neq \angle 2$ 。

方法 2:计算验证。

生 3:我只用量角器测量了 $\angle 1 = 58^\circ$,因为 $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ ($\angle 3$ 为 $\angle 1$ 的邻补角,下同),所以 $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$ 。又因为 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$,所以 $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$ 。所以, $\angle 1 = \angle 2$ 。

方法 3:推理验证。

生 4:因为 $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 3$ 为公共角,所以不需要度量也能直接得出 $\angle 1 = \angle 2$ 。

通过三种方法的比较,学生经历了“度量两个角(可能存在误差而影响所要验证的结论)一只度量一个角(虽然也可能存在误差,但不会影响所要验证的结论)一直接推理验证(利用特殊角和公共角)”的过程,感受到数学的严密性与逻辑性。

三、从单一到多元,丰富推理经验

在小学阶段,学生学习概念、法则、公式、定律时,主要借助较丰富的具体实例,通过观察、猜想、分析、验证等过程逐步抽象、概括得到。在此过程中,发展了合情推理的能力。但也不难发现,学生还能从已有的事实和确定的规则出发得到结论,并通过逻辑推理来证明结论的正确性,上述过程蕴含了演绎推理。合情推理和演绎推理在学生的数学学习中相辅相成。因此,教师既要给学生的数学思维插上发现的

翅膀,让他们体验合情推理,也要让学生经历严谨扎实的演绎推理过程,丰富推理经验。

例如,在探究平行四边形“对边相等、对角相等”的特征时,大部分学生是通过测量四条边的长度和四个角的角度来验证的。也有一部分学生是把平行四边形沿对角线剪开,得到两个三角形,发现旋转后可以完全重合,从而得到平行四边形的两组对边分别相等和一组对角相等。这时,教师可以顺势引导学生思考:另一组对角怎么验证其相等呢?学生大多认为可以还原后再沿着另一条对角线剪开,从而验证另一组对角也相等。教师追问:能不能只剪一刀,同时验证出两组对角、两组对边分别相等?

组 1:我们还是先沿着对角线剪开,旋转后两个三角形完全重合,可以证明两组对边相等, $\angle 1 = \angle 6$,同时还知道 $\angle 2 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 3$,所以 $\angle 2 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 5$,旋转回去也就是另一组对角相等(图 5)。

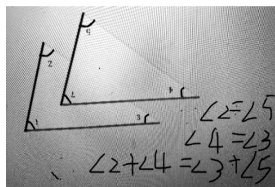


图 5

组 2:我们将这个平行四边形对折,剪开,旋转后两个平行四边形完全重合,可以证明两组对角相等,一组对边相等。因为这里的 $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$,所以 $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$,旋转回去也就是另一组对边相等(图 6)。

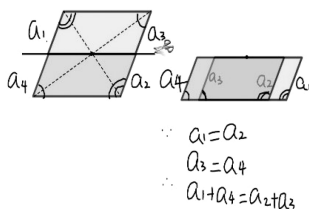


图 6

组 3:我们先通过画两条对角线找到中心点,然后经过中心点画一条线并剪开,旋转后能够得到两组对角相等,一组对边相等。另一组对边我们通过推理证明它们也相等(见下页图 7)。

学生观察图形特点,类比长方形、正方形特征后,对平行四边形边、角等特征进行猜测,并利用工具,

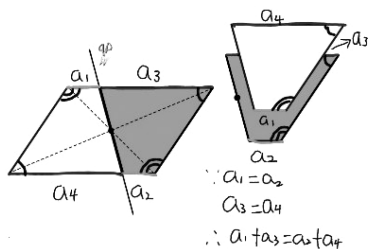


图 7

通过测量、剪拼形状与大小各异的平行四边形进行验证,归纳出平行四边形的特征.在此过程中,学生更多的是凭借经验和直觉作出合情推理,停留在“知其然”的水平上.于是,教师因势利导地启发学生:只剪一刀,你能同时证明对边、对角相等吗?由单一的合情推理引向合情推理与演绎推理结合.学生从“动手操作说明”到“操作与推理并用”再到“用三段论进行演绎说明”,体现了思维过程从直观具体的形象思维向抽象的逻辑思维过渡^[3],经历了完整的探究推理过程(图8),丰富了推理经验,深化了对推理过程和意义的感悟.

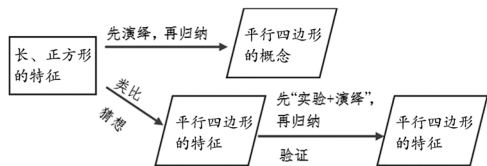


图 8

四、从思考到表达,养成推理习惯

发展学生的推理意识能促进学生的数学表达,而数学表达又有助于学生推理意识的形成.因而,在教学中要鼓励学生用数学语言合乎逻辑地进行讨论、质疑和论证,逐步培养“清楚地表达自己的思考过程和思考结果,对他人的问题解决过程给出合理解释”的推理习惯,养成严谨的数学思维.

例如,在教学三年级第二学期“解决问题”时,教师创设了“元旦迎新活动小胖负责分饮料”的情境:

小胖打算将6瓶橙汁分给20位同学,当他倒满12个小杯时,发现小杯正好用完,剩下的橙汁只能用大杯来装.如果大杯也都倒满,那么这些橙汁够分给每人一杯吗?(图9)

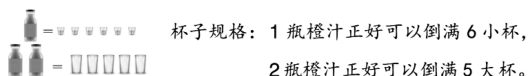


图 9

生1通过画图的方法来思考(图10):

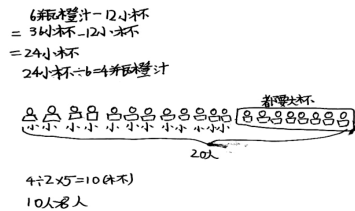


图 10

生2通过画线段图的方法来思考(图11):

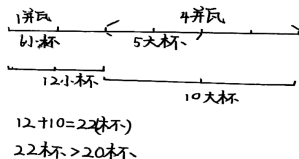


图 11

学生在探究过程中,通过阅读文本提取关键的数学信息,再将相关信息转化为图示进行表征,凸显条件之间的逻辑关系.同时,学生也能有理有据地给出合理解释.可见,注重思考与表达,能逐步培养学生良好的推理习惯.

推理意识关乎学生“用数学的思维思考现实世界”的水平,教师要充分重视数学推理教学的教育价值,通过从已知到未知、从猜想到验证、从单一到多元、从思考到表达等培养策略,加深学生对推理的形式与内涵的理解,积累推理方法和推理经验,达到逐步提升数学核心素养的目的.

注释:

①如无特别说明,本文所指教材均为沪教版《数学》.

参考文献:

- [1]史宁中.学科核心素养的培养与教学——以数学学科核心素养的培养为例[J].中小学管理,2017(1):35-37.
- [2]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022:9.
- [3]曹培英.跨越断层,走出误区:“数学课程标准”核心词的解读与实践研究[M].上海:上海教育出版社,2017:130.

【作者简介】黄蕾,上海市徐汇区第一中心小学.

【原文出处】《小学数学教师》(沪),2024.4.