

基于运算一致性发展学生的 运算能力和创新意识

——以“有理数的混合运算”的教学为例

曹建军

【摘要】内容结构化整合是基于学科本质的一致性进行的.数的认识、数的运算及其研究结构都有较高的一致性.基于运算关系与算理,以及学生运算能力的水平层次分析有理数混合运算的教学,要通过渗透数系扩充思想,引导学生归纳运算的一致性,将学生的运算能力从算法操作水平提升到算理理解水平再进阶到定义运算水平,切实提高学生运算的正确性和合理性,培养学生的学习能力和创新意识.

【关键词】一致性;数系扩充;学习能力;创新意识

《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称《标准(2022年版)》)强调设计体现结构化特征的课程内容,指出“重点是对内容进行结构化整合,探索发展学生核心素养的路径”.内容结构化整合是将具有相同本质特征的内容整合为同一主题,既体现了学习内容的整体性,也反映了学科本质的一致性,还表现了学习的阶段性.《标准(2022年版)》中,将之前小学阶段的“数的认识”“数的运算”整合为“数与运算”主题.初中阶段的“数与式”主题可以看作对小学阶段“数与运算”主题的延伸,其本质是数的认识的拓展,以及数与式的运算.义务教育阶段的“数与运算”和“数与式”构成了一个统整的主题系列,而统整的根本原因是一致性,体现在同一主题的学科本质和相关的核心素养的一致性.下面以有理数的混合运算的一致性为例来分析学科本质一致性的重要价值.

一、运算的一致性

有理数的混合运算一直是运算教学中的难点.实际上,本节课只有一个知识点——有理数的混合运算法则,而这一法则与小学所学的四则运算法则基本一致.为了降低难度,教师一般都采用分步混合原则展开教学,即在进行每一种运算教学时,都对前面学过的各种运算进行混合运算教学,明确相应的运算顺序.但在实际教学中,学生运算的错误率仍然较高,教师也找不到有效的解决办法,只能让学生不断做题进行矫正,因此增加了学生的学业负担.

要提高运算教学的有效性,除了提倡精致化练习外,理解算理和运算的一致性是关键.初中阶段学生运算能力的主要表现是理解运算对象、运算律和运算法则之间的关系,进一步感悟运算的一致性.根据调研可知,这是有理数运算甚至整个运算教学所欠缺

的.事实上,“数与运算”与“数与式”主题的运算一致性是非常明显的.

(一)数的认识的一致性

数的认识的本质特征是由数量到数的抽象.计数单位是数的表达的核心概念.从整数、小数、分数到有理数,具体的数量不同,表达的方式就不同,但都是用抽象的符号和计数单位来表达的.

整数是从1开始对数量的表达,小数和分数是对小于1的数量的表达,负数是对具有相反意义的量的表达.例如,整数4表示4个单位1,分数 $\frac{5}{8}$ 表示5个

分数单位 $\frac{1}{8}$,0.7表示7个小数单位0.1,-4表示4个具有相反意义的单位1.通过相反数将正数与负数建立联系,其本质是只有符号不同的两个数互为相反数(0除外).虽然数的意义在拓展,表示方式各有不同,但是它们本质上是一致的.

(二)数的运算的一致性

数的运算的一致性更为明显,具体的运算是对计数单位的操作,基本的运算是对计数单位的累加.例如,整数加法 $35+48=(30+40)+(5+8)=(3+4)\times 10+(5+8)\times 1$,是利用运算律进行相同数位的个数加减;异分母分数加法 $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{10}{15}+\frac{9}{15}=\frac{10+9}{15}$,是将不同计数单位通分后转化为同一计数单位再加减,本质上也是利用运算律进行相同计数单位的个数加减;有理数负数的运算 $-5-2=-(5+2)$ 是通过符号法则将含有负号的运算转化为基于计数单位的正数运算.

其中,运算律是进行初等代数运算的依据,是理解算理的基础.事实上,自然数系的加法、乘法、指数

运算的基本法则,它们是简单易用的,对于任何数都普遍成立.代数学的基本思想就是系统地运用这些法则.在数系的逐步扩充中,我们可以清楚地看到两点:第一,在 $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ 这一串数系的逐级扩充中,“后者的运算律普遍成立”是由“前者的运算律普遍成立”推导而得的;第二,使得数系在逐步扩充的过程中得以保持其运算律普遍成立,这就是每一步扩充时的一个指导思想.

随着数系的扩充,运算也随之拓展,计算的方法(算法)也越来越复杂,但基本的算理是一致的,都要与数的意义建立联系,都是基于计数单位的基本运算的拓展,这体现了数的认识与运算的整体性.

(三) 研究结构的一致性

数的认识与数的运算既有各自的特征,又有密切的联系,整合成一个主题更能体现完整的结构和关联的特征.由有理数及其运算研究抽象结构的一致性(如图1),可以得到所有“数与运算”主题研究的抽象结构(如图2),即概念—性质(序结构)—运算(代数运算结构)

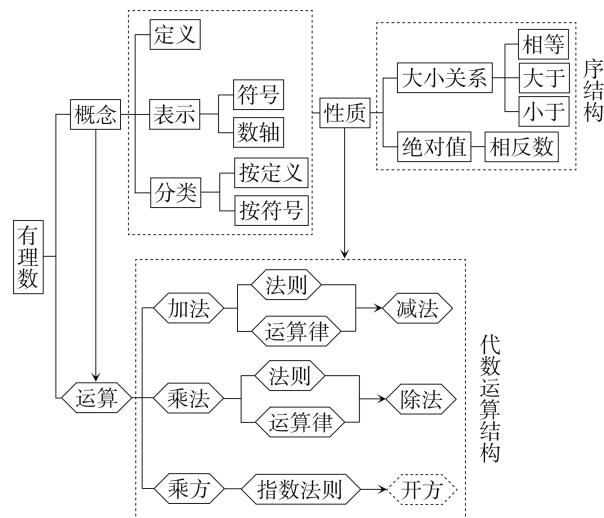


图1 有理数及其运算研究的抽象结构

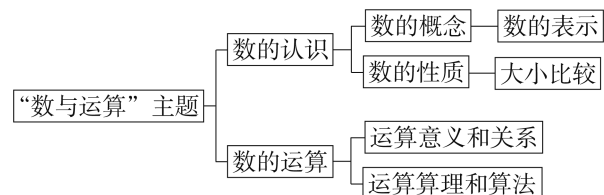


图2 “数与运算”主题研究的抽象结构

抽象结构是现代数学的基础,可以表述为“研究对象+”,其中“+”的内容可以是性质、关系或运算.这也是义务教育阶段的“数与运算”和“数与式”构成一个统整的主题的原因,体现了学习内容的整体性和一致性.《义务教育数学课程标准(2011年版)》(以下简称《标准(2011年版)》)中把负数的学习安排在小学阶段,却没有比较负数的大小(序结构),没有进

行负数的运算(代数运算结构).显然,这并没有让学生经历完整的数系扩充和数与运算研究的全过程,所以《标准(2022年版)》中把负数安排到初中阶段,就不难理解了.

二、加强对运算一致性理解的原因分析

那么,为什么要重视对运算一致性的理解呢?

(一) 基于运算关系与算理的分析

分析学生做有理数混合运算题时会出错的原因,主要体现在以下几个方面.(1)运算对象理解错误.主要是对含有负号的相关对象理解错误,如负数的乘方和乘方的相反数的问题.(2)符号法则问题.主要是在使用加法和乘法法则时确定符号出现错误,以及利用分配律时产生的符号错误,还有省略加号和算式中运算符与性质符号如何处理的问题.其主要原因是学生受到小学阶段正数运算思维定式的影响,对运算对象中具有符号加绝对值的结构难以把握.理解有理数运算的意义是解决问题的关键.(3)运算律运用错误.特别是误以为除法也有分配律.(4)运算顺序问题.其中,不同级运算主要是加减运算与乘除运算的运算顺序,乘方运算与乘除运算顺序的问题不大;同级运算,特别是乘除同级运算的顺序容易出现错误.

运算对象的理解和符号法则都是前面各运算的相应内容.因此,对运算关系的误解和没有理解算理是有理数混合运算中出现错误的主要原因.

(1)运算顺序与运算层级——基于运算关系的理解.

有理数混合运算的基础是掌握运算法则和运算律.有理数混合运算法则是对运算顺序的规定,运算顺序是基于运算法则和运算律总结出来的操作程序.也就是说,运算顺序是依据法则本身及法则之间的关系而确定的.如图3,加法是最基础的运算,减法根据法则可以转化为加法;乘法是几个相同加数的和,即乘法是特殊的加法,除法根据法则可以转化为乘法,其本质上是连减;乘方是几个相同因数的积,即乘方是特殊的乘法.所有初等运算都可以归结为加法运算.因此,我们规定加、减为同级运算,乘、除为同级运算,而不同级运算之间遵循先特殊后一般的顺序,即加、减为一级运算,乘、除为二级运算,乘方为三级运算,先乘方,再乘除,最后算加减.这种规定是符合学生的日常思维习惯的.

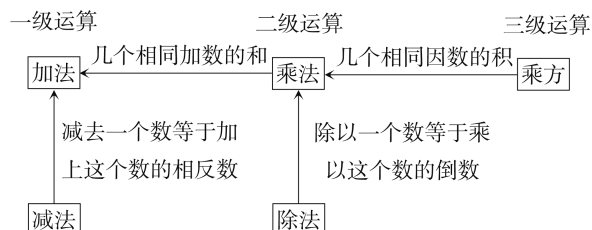


图3 有理数各运算间的关系

(2) 运算律——基于运算算理的理解.

$$6 \div \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = 9 - 4, 15 \div 5 \times (-3) = 15 \div$$

(-15) 等运算错误的产生, 是因为学生没有理解不同的运算实际上具有不同的算理.

有理数的加法与乘法都是在介绍运算法则后, 着重在符号法则的基础上进行基本运算, 然后结合具体例子引入运算律, 并运用运算律简化运算. 减法与除法法则分别着重介绍如何向加法与乘法转化, 从而利用加法与乘法的运算法则、运算律进行运算. 也就是说, 减法和除法没有运算律, 只有在转化为加法和乘法后, 才可以利用运算律简化运算.

(二) 基于学生运算能力的水平层次分析

史宁中教授认为, 对于教学内容, 很难通过一节课或一个知识点就把数学的本质表述清楚——只有把这些内容融为一体进行教学设计, 才能在关注知识技能的同时, 认真思考数学的本质. 因此, 《标准(2022年版)》将“设计体现结构化特征的课程内容”作为课程理念之一.

初中阶段“数与式”主题是小学阶段“数与运算”主题的延续, 数的认识拓展到有理数、实数. 而运算不仅包括数的运算, 还拓展到式的运算. 到了高中阶段, 还可以拓展到复数、向量的运算, 但主题的学科本质是一致的. 实际上, 在“数与运算”“数与式”主题下, 几乎所有问题都可以用这样一个或几个核心概念去理解, 这样少量的几个核心概念就反映了这一主题的学科本质.

具体到本节课, 根据《标准(2022年版)》中对运算能力这一数学核心素养的阐述, 我们可以将运算能力的表现分为以下三个水平层次. (1) 运用算法. 学习了有理数的混合运算法则, 学会正确的算、合理的算. (2) 理解算理. 不仅知道运算的步骤, 也明白运算的道理. (3) 定义运算. 通过经历有理数的扩充过程, 感悟数系扩充过程中运算的一致性. 显然, 聚焦“定义运算”的教学才能够让学生感悟到运算的一致性其实是反映其学科本质的, 也是真正能够提高运算教学实效的.

由此, 有理数及其运算学习的功能定位为: 经历“数与运算”的系统学习, 初步建立研究数系扩充、运算法则和运算律的基本套路(概念—序结构—代数运算结构), 为后续学习奠定必要的代数基本思想和基本方法基础. 具体到本节课, 也需要对混合运算进行小结, 以形成较为清晰的有理数运算系统结构和正确的数学观念.

三、基于运算一致性的教学案例

环节1: 回顾小学阶段所学的正数的运算法则.

教师给出如下两个式子.

$$(1) 8 \div 2 \times \frac{1}{2};$$

$$(2) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) \times 12 + 3.$$

问题1: 式子中涉及哪些运算? 按怎样的顺序计算? 为什么要按这样的顺序计算?

追问1: 有简便的运算方法吗?

追问2: 有理数与小学所学的数相比有什么区别?

追问3: 在数系扩充的过程中, 为了保证原有的运算规律仍然成立, 又是怎样定义运算的呢?

【设计意图】第(1)小题旨在帮助学生回顾同级运算按照从左到右的顺序进行运算; 第(2)小题旨在带领学生回顾有括号要先算括号里面的内容, 不同级运算先算乘除, 再算加减. 强调加法是最基础的运算, 而加减法是同级运算, 是一级运算, 乘除法是二级运算. 通过两个正数运算的例子明确小学阶段所学的数的混合运算中涉及的运算类型与层级, 回顾四则混合运算法则, 梳理四种运算之间的关系, 明晰算理. 同时, 引导学生简便运算, 回顾运算律.

环节2: 回顾有理数运算中单一的运算法则.

教师给出如下式子.

$$(1) -\frac{1}{3} + \frac{1}{4}; \quad (2) 9 \times \left(-\frac{1}{3} \right);$$

$$(3) \frac{5}{4} - 6; \quad (4) \frac{1}{4} \div \left(-\frac{1}{12} \right).$$

问题2: 第(1)(2)小题第一步运算的依据是什么? 其目的是什么?

问题3: 第(3)(4)小题第一步运算的依据是什么? 其目的是什么?

教师继续给出下面的两个式子来带领学生探寻“为什么如此转化”.

$$(5) \frac{5}{4} - 6 - \left(-\frac{3}{4} \right);$$

$$(6) 4 \times (-3) + (-2 + 1) \div \left(-\frac{1}{3} \right).$$

追问1: 对于第(5)小题, 要怎么计算呢?

归纳: 在有理数范围内, 运算律仍然成立, 这是数能够从非负数扩充到有理数的前提.

追问2: 为什么要将减法和除法运算转化为加法和乘法运算呢?

问题4: 第(6)小题是按什么顺序进行运算的?

【设计意图】通过第(1)(2)小题回顾有理数加法法则和乘法法则, 两者都是先确定符号, 再进行绝对值运算. 也就是通过法则将有理数运算转化为小学阶段学过的正数运算, 将未知运算转化为已知运算. 通过第(3)(4)小题回顾有理数减法法则和除法法则, 体会将减法转化为加法、将除法转化为乘法的转化思想. 通过第(5)(6)小题说明小学阶段的四则混合运算法则在有理数范围内仍然适用. 事实上, 在数系扩充的过程中, 数学家们正是在保

证这些运算规律仍然成立的前提下,定义了有理数的运算。

环节3:归纳有理数的混合运算法则。

教师给出如下式子。

$$(7) \frac{2}{2} \times (-3) + (-2+1) \div \left(-\frac{1}{3}\right).$$

问题5:第(7)小题中的运算顺序又会发生什么变化?为什么?

问题6:乘方与其他运算有什么关系?

问题7:所有的运算最后都可以转化为加法。加法是最基础的运算,而加减法是同级运算,是一级运算,乘除法二级运算,乘方是三级运算。由此,你能否基于运算层级和四则混合运算法则来归纳有理数混合运算的法则?

【设计意图】通过在第(7)小题中增加乘方运算,让学生进一步理解乘方与其他运算之间的关系,明确运算层级,为归纳有理数混合运算法则奠定基础。

四、理解学科本质一致性的核心目标是培养学生的学习能力和创新意识

主题中的核心概念能体现学科本质的一致性,有助于实现举一反三,提高教与学的效率。在对该主题内容持续学习的过程中,学生会不断地利用这些概念,并通过迁移概念来解决新问题,进而使推理能力、运算能力、创新意识等数学核心素养不断得到发展。

(一)通过学科核心概念的学习过程来培养学生的学习能力

如前所述,运算的一致性并不是要学生以某种固定的方式来一致地计算,而是要引导学生学会一致性地思考问题。对于有理数混合运算的教学,要帮助学生建立研究运算的基本方法,归纳数系扩充的策略与方法,为学生自主建构新数的运算奠定基础,从而让学生学会学习。通过有理数的扩充过程,我们明确了其扩充的基本思路:通过引入负数,实现加法运算的逆运算——减法运算的封闭性,把数的范围扩大到有理数(概念),研究大小关系的性质(序结构)和运算与运算律(代数运算结构),并在理解运算意义和关系的基础上确定运算顺序。由此,形成以下四个方面的学习经验:(1)数系扩充的基本原因是满足生产、生活实际的需求和数学自身发展的需求(满足运算的封闭性);(2)数系扩充的基本过程是“背景—概念—性质—运算—应用”;(3)数系扩充学习的基本规律是引进一种新的数,就要定义它的运算,而定义一种运算,就要研究它的运算律,这也是代数学的核心思想;(4)数系扩充的基本思想是使得在原来范围内成立的规律在更大的范围内仍然成立。只有经历了主题核心概念的学习过程,积累了相应的学习经验,在后续的

学习中,学生自主利用核心概念解决新问题才成为可能。

(二)通过用核心概念迁移解决新问题来培养学生的创新意识

数系扩充要研究继承性,也要研究相容性(为保持运算的封闭性而扩充),更为重要的是要研究创新性。在数系及其运算的扩充过程中,核心的问题是在添加了一类新数后,所引进的新数之间的运算如何归结到原有的数之间的运算而定义运算法则,进而使原有的运算律在新的数系中得以保持,这显然是学科思维最核心的部分。例如,有理数的内容就是要研究在为保持封闭性而扩充后,四则运算法则是否仍然能够保持?为了能够保持,就需要定义有理数的相关概念及其运算。绝对值是引入负数使数系扩充后仍然保持不变的数的属性,体现了数系扩充的继承性;相反数和倒数反映了有理数域结构的运算本质,体现了数系扩充中的创新性。又如,为了满足开方运算的封闭性,引入无理数形成实数系,定义无理数的运算,使得有理数的运算能在实数范围内仍然成立。

数学教学的最主要任务是使学生学会思考,培养学生的思维能力,这是由数学的学科性质所决定的。用什么方式引导学生的数学思维活动,使学生在掌握知识的过程中学习数学思维方式,从学会思考逐步走向学会学习、学会创新,是我们需要认真思考和落实的主要任务。

参考文献:

- [1]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022.
- [2]鲍建生,章建跃.数学核心素养在初中阶段的主要表现之二:运算能力[J].中国数学教育(初中版),2022(6):3-8.
- [3]项武义.基础代数学[M].北京:人民教育出版社,2004.
- [4]史宁中,曹一鸣.《义务教育数学课程标准(2022年版)》解读[M].北京:北京师范大学出版社,2022.
- [5]克莱因F.高观点下的初等数学(第一卷)[M].舒湘芹,陈义章,杨钦樑,译.上海:复旦大学出版社,2008.
- [6]吴增生.在结构化知识体系整体建构和综合应用中发展数学核心素养:有理数与实数[J].中国数学教育(初中版),2023(5):18-22.

【作者简介】曹建军(1971-),男,浙江省杭州第六中学高级教师,主要从事数学课程与教学研究。

【原文出处】《中国数学教育》:初中版(沈阳),2024.5.44~48

【基金项目】2024年杭州市教育科研专项课题——领域主题统领的初中数学结构化教学研究(G001)。