

真实问题情境下的项目式学习探究

——以“最小覆盖圆”为例

张超 朱宸材

【摘要】以最小覆盖圆为主题,以项目为载体开展探究式学习活动,构建项目式学习设计与实施策略,展开基于问题驱动、选择评估、深度研究、成果评价四个方面的具体探索,提出项目式学习促进“教”与“学”的变革,剖析项目式学习的内涵与价值,丰富学生的活动体验,为核心素养的养成指明方向。

【关键词】项目式学习;核心素养;最小覆盖圆

一、项目式学习的内涵与价值

《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称标准)指出,项目学习以用数学方法解决现实问题为主,其目标是引导学生发现解决现实问题的关键要素,用数学的思维分析要素之间的关系并发现规律,培养模型观念,经历发现、提出、分析、解决问题的过程,培养应用意识和创新意识^[1]。国内学者将项目式学习定义为以建构主义理论为指导,直接指向“学为中心”的教学方式。

从上述基础出发,本文将项目式学习的内涵表述为围绕数学教育教学目标,让学生经历一体化的教学方式获得知识、技能、方法、思想,并融合多学科知识解决真实情境问题的探究式学习活动,最终达到深化知识体系,实现“知行合一”。其价值可以归结为以问题为导向,以探究为核心,以合作共学为形式,倡导在学习过程中使学生从传统的学科性学习走向综合性学习,从单纯的文本式学习走向体验式学习,从规定

的标准化学习走向个性化学习^[2]。

二、项目式学习的设计与实施策略

基于以上认识,笔者查阅相关资料,结合标准描述,找到了项目式学习的一般设计思路,即寻找核心知识——形成本质问题——转化为驱动性问题——澄清高阶认知策略——确认主要的学习实践——明确学习成果及公开方式,并设计覆盖全程的评价^[3]。以真实情境下的问题解决为重点,通过数学和其他学科知识的有效融合,构建包括项目主题、驱动性问题、核心知识、学习实践、高阶认知、成果展示、反思评价等内容的学习体系。具体呈现为(图1),形成聚焦素养发展的多学科知识理解、多学科方法运用、多学科情感融合、系统性统整思维的多层次目标体系。

三、项目式学习内容分析

“最小覆盖圆”是苏科版《数学实验手册九年级》实验12的教学内容,是针对九年级上册数学教材内容“2.3 确定圆的条件”的补充拓展,也是学生学习的

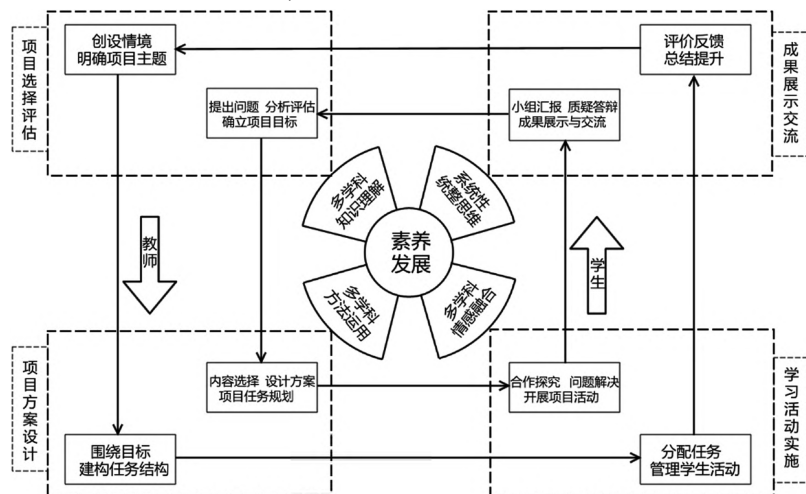


图1

难点所在.若以常规内容方式开展教学,学生缺乏活动体验,课堂易陷入仅传授知识的误区,而从项目式学习入手,基于真实情景中的问题思考,以小区建立“WiFi 发射器”为背景,以跨学科综合学习为主题,将数学中几何直观、运算能力、数据观念、推理能力、辩证思维、合作沟通能力有机融合,在实践中建构新知,提升能力,发展素养.

四、项目式学习设计与实施

(一) 问题驱动——明确研究目标

提出问题共建“智慧”社区,畅享“无线”生活,某小区计划实现小区内无线 WiFi 全覆盖.现准备在小区内新建一个 WiFi 发射器,为使 1~4 号 4 个点(位置如图 2)都能接收到 WiFi 信号(信号覆盖范围是以中转站为圆心的圆形区域)且使得发射器所需发射功率最小,此发射器应建在何处?

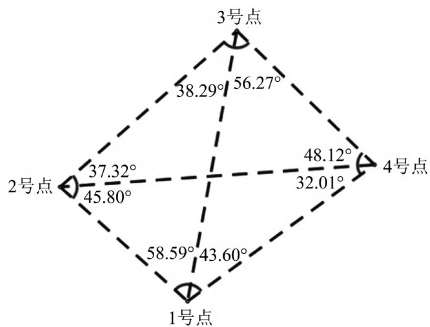


图 2

选定项目主题后,上述“WiFi 发射器”问题提前一周布置,让学生先行探究.学生热情高涨,课前提出下列想法:

生 1: WiFi 信号属于电磁波,发射电磁波功率的大小由发射器与接收点的距离远近决定.

生 2: 信号能够覆盖小区 1~4 号点的所需半径越小,所需发射功率越小.

生 3: 发射器位置的确定应该和圆的知识相关……

基于所需发射器功率大小的思考,学生联系到物理中影响电磁波功率大小的条件,进而转化为数学中的“距离”问题.虽有学生联想到了圆,但无法具体描述其与圆的相关性,需给予学生继续探索的方法性指导.

为此,创设与研究主题相关的问题情境,选择适合学生开展活动的探究方式,具体如下:

情境 1 生活中的覆盖现象

地球表面约 71% 的面积被水覆盖,其中 97% 是不能被陆生生物利用的海水,剩下的 3% 的淡水中又有 2% 以上集中在南北极,只有不足 1% 的淡水能够被人类直接使用,保护水资源势在必行.

情境 2 操作探究

(1) 在单位长度为 1 的正方形方格纸上画一条

长度为 2 的线段 AB , 作一个圆完全覆盖线段 AB , 你有什么发现?

(2) 存在覆盖线段 AB 且半径的最小的圆吗? 怎么画?

设计意图 通过学生熟知的生活现象,初步理解“覆盖”的含义.学生通过作线段的覆盖圆进行比较,得到更小覆盖圆,直至找出最小覆盖圆.在操作中,尝试定义平面图形的最小覆盖圆,并能够依据概念明晰最小覆盖圆的特征.借助最小覆盖圆,将“WiFi 发射器”问题转化为数学问题——确定四边形的最小覆盖圆,并以此确立项目研究目标.

(二) 选择评估——设计研究方案

为确保项目能够顺利开展,需对项目学习的研究目标进行分析和评估.从教师视角出发:学生能够从实际情境中抽象出数学模型——探索四边形的最小覆盖圆.从学生的视角来看:项目研究的问题要具有情境性和挑战性,在问题研究的过程中激发学习热情.

立足学生已有的知识经验,提出如下两个问题,进行项目评估.

问题 1 四边形的最小覆盖圆就是四边形的外接圆?

生 4: 不一定,四边形不一定存在外接圆但四边形的最小覆盖圆一定存在.

追问 能否举例说明?

生 5: 如图 3, 四边形 $ABCD$ 不存在外接圆, $\odot O$ 是它的最小覆盖圆.

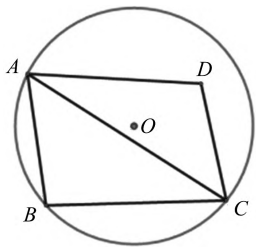


图 3

问题 2 四边形的最小覆盖圆如何确定?

生 6: 连接四边形的对角线, 四边形可转化为两个三角形, 四边形的最小覆盖圆就是同时覆盖两个三角形且半径最小的圆.

依据对项目的评估,将项目研究目标拆解成三个研究任务:

任务 1 确定三角形的最小覆盖圆;

任务 2 确定对角互补的四边形的最小覆盖圆;

任务 3 确定对角不互补的四边形的最小覆盖圆.

(三) 深度研究——实施学习活动

研究任务 1 确定三角形的最小覆盖圆.

活动 1 尺规作图, 作三角形的最小覆盖圆.

问题 3 三角形有无数个, 如何选取有代表性的

三角形?

问题4 三角形的外接圆是否就是最小覆盖圆?

探索 (1)分别作锐角、直角和钝角三角形的最小覆盖圆;(2)三角形的外接圆和最小覆盖圆的区别和联系;(3)归纳三角形最小覆盖圆的模型.

研究成果 锐角三角形、直角三角形的最小覆盖圆就是它们的外接圆;钝角三角形的最小覆盖圆是以最长边为直径的圆.

研究任务2 确定对角互补的四边形的最小覆盖圆.

活动2 尺规作图,作矩形和正方形的最小覆盖圆.

问题5 矩形和正方形的最小覆盖圆有什么特点?

问题6 如果是一般的平行四边形呢?

探索 对角互补的四边形最小覆盖圆.

研究成果 对角互补的四边形最小覆盖圆(图3)是 $\triangle ABD$ (或 $\triangle BCD$, $\triangle ABC$, $\triangle ACD$)的外接圆.

研究任务3 确定对角不互补的四边形的最小覆盖圆.

活动3 在 $\triangle ABD$ 的最小覆盖圆 $\odot O$ 内取一点 C ,使点 C 与点 A 在线段 BD 的异侧,如图4,分别连接 BC 和 CD ,形成四边形 $ABCD$. $\angle A + \angle C$ 与 180° 具有怎样的数量关系? $\odot O$ 是四边形 $ABCD$ 的最小覆盖圆吗?

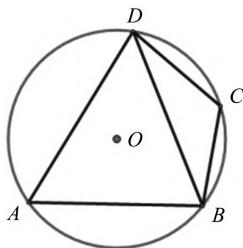


图4

探索 在 $\triangle ABD$ 的最小覆盖圆内取点 C ,构造对角分别为:一个钝角、一个锐角、一个钝角、一个直角以及两个钝角的四边形,由此探究这三种对角不互补的四边形的最小覆盖圆与 $\triangle ABD$ 最小覆盖圆的联系.

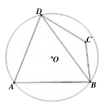
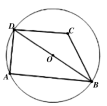
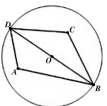
研究成果 对角不互补的四边形的最小覆盖圆.

五、成果评价——以评促学

(一)提出疑问相互交流

问题7 钝角三角形的外接圆为什么不是最小覆盖圆?

生7:类比线段最小覆盖圆的探究,三角形的最小覆盖圆首先要覆盖最长边,图5中 $\odot O$ ($\triangle ABC$ 的外接圆)和 $\odot O'$ (以 BC 为直径的圆)都能覆盖 BC ,点 A 分别在 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 的内部和圆上.借助 $Rt\triangle OO'B$ 的三边关系,可知 $O'B > OB$,所以钝角三角形的最小覆盖圆是以最长边为直径的圆.

一组对角的数量关系		对应图形	最小覆盖圆
$\angle A + \angle C > 180^\circ$	一个锐角、一个钝角		$\triangle ABD$ 的外接圆
	一个直角、一个钝角		$\triangle ABD$ 的外接圆
	两个钝角		以钝角 $\triangle ABD$ 和钝角 $\triangle BCD$ 的公共边 BD 为直径的圆

问题8 在研究任务3中,只涉及了 $\angle A + \angle C > 180^\circ$ 的情形,那 $\angle A + \angle C < 180^\circ$ 呢?

生8:在四边形 $ABCD$ 中,对于 $\angle A + \angle C < 180^\circ$ 的情形可以转化为 $\angle B + \angle D > 180^\circ$,然后将 $\angle B$ 和 $\angle D$ 按照数量关系重新进行分类①一锐角一钝角、②一直角一钝角、③两个钝角,等同于图5的研究.

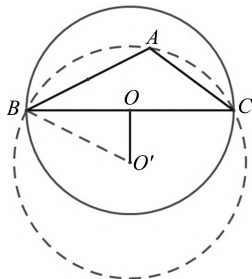


图5

问题9 通过对上述学习活动的探究,“WiFi 发射器”问题可否解决?

生9:可以.首先将1~4号点的位置抽象成四边形 $ABCD$ 的四个顶点,计算四边形 $ABCD$ 中两组对角的和($\angle DAB + \angle DCB = 196.75^\circ > 180^\circ$, $\angle ADC + \angle ABC = 163.25^\circ < 180^\circ$),再根据 $\angle DAB = 102.2^\circ > 90^\circ$, $\angle DCB = 94.56^\circ > 90^\circ$,判断出四边形 $ABCD$ 属于一组对角和大于 180° ,且两个对角为钝角的类型,其最小覆盖圆是以钝角 $\triangle ABD$ 和钝角 $\triangle ACD$ 的公共边 BD 为直径的圆,所以发射器应建在 BD 的中点 O 处(如图6).

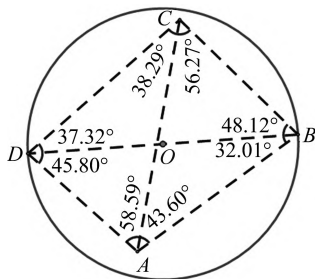


图6

(二) 设立量规评价分析

评价可以反思项目的研究进程,反馈项目学习的效果,这是实施项目式学习的重要环节^[4]。为确保项目评价与学习目标、探究活动、项目成果保持一致,项目评价需实现学前、学中、学后三个阶段全覆盖,教师和学生需从学前认知、学习过程和学习效果三个维度协商设计评价量规。

“最小覆盖圆”这一学习项目,学前认知评价是指在项目立项前,教师通过提出“发射器”问题,引出“最小覆盖圆”的概念,诊断学情,评估项目开展的可行性;学习过程评价,每个学习小组在研究项目任务过程中,依据组员在分工协作、沟通交流、自我调整等方面表现,进行相互测评;学习效果评价,待整个项目学习结束后,每位同学对个人研究成果和集体智慧的项目成果中所包含的核心知识的理解和掌握程度,进行自评,总结收获,反思缺失。

六、项目实践反思

(一) 真实情境下的问题解决促进“教”与“学”的变革

“做”是“学”的过程,“学”是“做”的结果。学生“做”的过程体现在围绕项目研究目标,设计并分解研究任务,实施项目学习活动;“做”的结果是学生所学知识能力的真实运用和在生活情境中的真实思维。例如本案例创设“WiFi 发射器”问题情境,围绕“四边形的最小覆盖圆”设计驱动性问题,并把它拆解成三个具有逻辑关联的项目任务,包括确定三角形、对角互补的四边形、对角不互补的四边形的最小覆盖圆,学生在对三角形和四边形的外接圆与最小覆盖圆的实践探索中,实现对最小覆盖圆问题的深层次理解和迁移。项目式学习是对课堂教学的重新定位,将教师为中心的标准化学学习转变为学生为主体的探究式学习。教学中,明确项目主题与研究目标是项目式学习的正确打开方式,课前教师布置学习任务,学生在收集、整理相关信息后提出问题解决可能的方向;问题驱动是推动学生进行持续性探究的重要手段,教师通过问题导向,在项目设计时给予纲领性指导,项目实施时给予合理性参考,成果汇报时给予总结性评价,帮助学生在问题解决的过程中提升学习理解、实践创新能力;从“学”的维度看,项目式学习突出在真实情境中的实践学习,学习空间从课内延伸到课外,学生通过选择和优化学习资源,实现对核心知识的深刻理解,并能在真实情境中进行运用和迁移,形成正确的学习观。

(二) 覆盖全程的评价方式活动体验和提升素养并重

为保证项目评价与学习目标、学习活动、研究成果相互匹配,此次项目式学习实行全程评价,评价范

围覆盖学前、学中、学后三个阶段。改变以结果为导向的单一评价方式,评价方式的选择更加多元,例如立项前,在学前中引入“WiFi 发射器”问题,提出“最小覆盖圆”的概念,对项目开展的可行性进行判断性评价。项目实施阶段,以学习评价量规为标准,各组员针对问题探究、交流合作、技术支撑等方面的过程性表现展开量化评价。学后整理与反思阶段,立足于对核心概念的理解,借助项目成果的展示与汇报、质疑与答辩等形式,学生内视自己的学习效果进行选择评价。以跨学科融合为主张、探究式学习为实践样态的项目式学习从自身体验性出发,丰富学生的感官体验。以项目为载体,教师通过搭建学习性支架与工具让学生体验学习过程的具体化、可视化,充分激发好奇心和求知欲。借助小组分工、相互协作的方式推动项目探究,课外收集资料进行项目方案设计与实施,课内项目成果展示与交流,良好的活动体验和多维度的探索空间驱动学生持续性地对知识进行发现、理解和再创造,帮助学生在问题解决的过程中将学科性知识转化为方法性知识,通过自我分析和表达使得学习理解、实践运用以及迁移创新能力得到提升,建立符合学生个性发展逻辑和核心素养提升的路径。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[S]. 北京:北京师范大学出版社,2022:88.
- [2] 陆启威. 项目式学习亟厘清的几个问题[J]. 江苏教育研究,2019(11B):13.
- [3] 夏雪梅. 项目化学习设计:学习素养视角下的国际与本土实践[M]. 北京:教育科学出版社,2018:27.
- [4] 张超,王晓峰,李明树. 基于项目式学习发展数学核心素养——以“校园篮球赛中的战术”为例[J]. 中国数学教育(初中版),2023(7/8):18-23.

【作者简介】张超,江苏省苏州工业园区东沙湖中学(215127);朱宸材,杭州师范大学经亨颐教育学院(311121),江苏省无锡市长安实验学校(214021)。

【原文出处】《中学数学教学》(合肥),2024.3. 10~14

【基金项目】江苏省中小学教研第十五期立项课题“初中数学项目式学习的创新设计与实践案例研究”(编号:2023JY15-L44);江苏省第十四期中小学教研重点自筹课题“基于数智融合培养初中生数学建模能力的创新探索和路径探析”(编号:2021-JY14-ZB04);苏州工业园区基础教育前瞻性教学改革实验项目“基于STEAM理念的初中数学综合与实践教学设计研究”。