

【学科视点】

我国中小学数学理解领域研究热点、演化路径与未来趋势

——基于 CiteSpace 的知识图谱分析

黄贤明

【摘要】采用文献计量法、知识图谱可视化等方法,对2001年1月至2023年12月我国中小学数学理解研究领域的464篇期刊文献和126篇学位论文进行分析,发现“数学理解”“理解”“小学数学”“教学策略”等是该研究领域的高频关键词,形成#0 数学理解、#1 理解、#2 教学策略等9个聚类关键词,演化路径大致分为理论探索阶段(2001年—2009年)、理论深化与实践起步阶段(2010年—2016年)和实践研究阶段(2017年至今)。未来的相关研究可以关注指向数学理解的“教、学、评”一体化研究,发展学生高水平深层次数学理解的路径研究,数学理解视角下的教材开发与研究,关注数学文化性理解的研究。

【关键词】数学理解;理解;研究热点;演化路径

一、引言

理解是教育永恒的追求。在数学教育领域,布劳内尔(Brownell, W. A.)最早从理解的视角研究了算数教学,研究了影响教师“教”与学生“学”的心理因素,自此,数学教育研究者开始关注数学理解的研究。1976年,斯根普(Skemp, R.)提出了数学理解的分类模式,即工具性理解和关系性理解,为教学内容的层次水平划分提供了参考,随后在后续研究中进一步完善为工具性、关系性、逻辑性和符号性理解四种模式。1989年,皮瑞和基伦(Pirie & Kieren)提出了“超回归”数学理解模型,将数学理解视作动态、连续、非线性性的递归过程,并用嵌套的圆表示原始认知(Primitive knowing)、产生表象(Image Making)、形成表象(Image Having)、关注性质(Property Noticing)等八个水平,为数学理解的教学实践研究提供了坚实的理论基础。可以发现,早期国际数学理解研究主要以理论思辨为主,直到20世纪90年代末,数学理解的理论研究趋于成熟与完善,并逐渐受到国内数学教育研究者的关注。

通过CNKI数据库平台的检索发现,我国21世纪以前的数学理解研究聚焦于对数学概念、命题的理解及学生数学理解能力的培养研究。21世纪以来国内

数学理解研究出现了相对繁荣的景象,理论思辨研究的不断深入,教学实践研究的不断拓展,形成了“为理解而教,为理解而学”的教育观念,并持续至今。我国已有学者对这一领域的研究成果进行了梳理与分析。比如,张文辉、王光明^[1]从内涵、功能与层次三个维度对国内外数学理解研究进行梳理,并指出了当下研究存在的问题、困境及展望;熊丙章、刘丽颖^[2]从理论与实践两个维度对国内外数学理解研究进行综述,并从研究角度、内容与方法上对我国数学理解研究提出展望;徐彦辉^[3]主要整理了国外四种经典的数学理解理论,为国内数学理解研究提供借鉴参考;余瑶、张春莉^[4]系统梳理了国外数学理解的研究历程,并着重阐述了斯根普的两种数学理解模型和“超回归”数学理解模型,给出了对国内数学理解研究的努力方向。但目前国内学者多使用质性分析方法总结国外数学理解研究现状,而应用科学计量工具可视化分析国内数学理解研究现状的较少。基于知识图谱的量化研究可清晰客观地反映某一研究领域的研究热点、演化路径与未来趋势等内容,对研究的未来发展具有重要意义。

因此,本研究以中国知网刊发的中小学数学理解研究文献作为样本数据,借助科学计量软件CiteSpace

对我国中小学数学理解领域的研究热点、演化路径和未来趋势进行探讨,为我国未来中小学数学理解研究发展提供建议。

二、研究设计

(一)研究工具与思路

本研究主要采用文献计量法和知识图谱可视化的方法,对我国中小学数学理解的相关文献展开分析。本研究通过对高频关键词进行整理分析,对关键词聚类图谱进行解读,对该领域研究的时间线图与关键词突显图谱进行分析,揭示研究的演化路径与未来趋势。

(二)数据获取

在 CNKI 数据库平台文献分类目录里选择:基础科学(数学)、社会科学Ⅱ辑(教育理论与教育管理、初等教育、中等教育)文献库进行跨库检索,设置主题为“数学理解”、关键词“数学理解”或“理解”的精确检索词条进行检索。检索时间为 2024 年 1 月 1 日,共计检索到 920 篇论文与报纸文献,172 篇学位论文。经过进一步筛选,去除高等教育和职业教育的相关研究文献、面向学生阅读的文献、卷首语及与数学理解研究关联性不强的文献,进而将数据导入 CiteSpace 软件进行格式转化与重复项过滤,最终得到我国中小学数学理解研究领域 2001 年 1 月至 2023 年 12 月发表的文献共计 464 篇期刊文献和 126 篇学位论文。

三、热点分析

文章关键词是对文章内容的高度凝练,对关键词进行相关分析可以探寻该领域内的研究热点。本研究主要关注对关键词频次统计分析,并在此基础上进行关键词聚类,进而总结出该领域的研究热点。

(一)关键词频次统计分析

结合 CiteSpace 软件生成的关键词共现图谱,并应用 Excel 对高频关键词进行统计,结果如表 1 所示。

由表 1 可知,关键词“数学理解”与“理解”的出现频次较高,且远超其他关键词。同时,这两个关键词出现时间较早,说明 21 世纪初研究者们重视学生的主体地位,贯彻“为理解而教,为理解而学”的教学理念,也反映出研究者们对数学理解进行了长期探索与深入研究。此外,关键词“初中数学”和“小学数学”的出现频次较高,说明数学理解研究在义务教育阶段的教育教学工作中受到了研究者的广泛关注。其中“小

表 1 高频关键词统计

序号	频次	关键词	最早出现时间
1	231	数学理解	2001
2	93	理解	2002
3	38	小学数学	2012
4	21	教学策略	2009
5	19	数学概念	2005
6	16	数学教学	2005
7	14	教学设计	2008
8	12	数学学习	2002
9	12	初中数学	2015
10	12	数学	2005
11	10	策略	2010
12	9	几何直观	2016
13	9	关系性理解	2001

学数学”的出现频次是“初中数学”出现频次的三倍多,意味着研究者更关注对小学生数学理解的培养与发展,这可能与小学阶段数学知识基础性、实践性、应用性较强的特征与小学生认知心理发展特点密切相关。关键词“教学策略”与“策略”的出现频次较高,说明在早期对数学理解理论研究较为完善的基础上,研究者们从理论走向实践,开始探索发展学生数学理解的路径与策略,其中关键词“几何直观”频繁出现也反映了几何直观是能够促进学生数学理解的重要策略与路径。最后,2008 年出现的关键词“教学设计”体现了数学理解研究逐渐落实于实践,并通过具体的教学课例展现,以发展学生的数学理解能力,培养学生数学核心素养作为数学教学的重要指标。其他关键词“数学教学”“数学概念”“数学”等也备受关注,揭示了数学理解研究所聚焦的重点对象。

(二)关键词聚类图谱分析

在统计分析高频关键词的基础上,为进一步研究关键词之间的共性,总结研究热点主题,进一步通过对关键词进行聚类操作,得到如下页图 1 所示的关键词聚类图谱。

#0 数学理解是最大的聚类主题。该主题主要围绕关键词“数学理解”“迁移能力”“数学理解层级”“创新思维”等展开。该聚类的研究主要聚焦于数学理解理论与实践层面的研究。例如,黄燕玲、喻平^[5]从知识分类的角度阐述了数学理解的本质,具体来说,



图1 关键词聚类图谱

对陈述性知识的理解是指学习者获得对象的图式;对程序性知识的理解是指学习者建立了双向产生式和产生式系统;对过程性知识的理解是指学习者形成完善而深刻的关系表征和观念表征。吕林海^[6]提出了数学理解的 EFSC 过程模型,即将数学理解划分为经验性理解、形式化理解、结构化解理解与文化性理解,为基于数学理解的教学设计提供理论支撑。王新奇^[7]在此基础上提出了数学理解的 EFSTC 过程模型,在结构化理解之后添加了迁移性理解,进一步完善了数学理解的层级理论(如图2)。

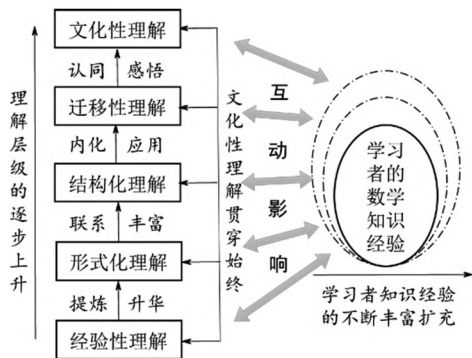


图2 数学理解的 EFSTC 过程模型

#1 理解是第二大聚类主题。该主题主要围绕关键词“数学理解能力”“布卢姆学习层级”“多元学习表征”等展开。该聚类的研究主要聚焦于培养学生对具体数学知识的理解能力,侧重于将数学理解回归于布卢姆认知领域目标分类六个层次中的“理解”层级。例如,李光树^[8]指出理解数学知识的有效途径包括:确保学生具有理解新知识所必需的知识经验,充分利用知识表象理解数学知识,切实沟通数学知识之间的联系,让学生获得正确的理解方法。鲁静华^[9]探

讨了多元表征与概念学习之间的关系,提出通过利用多元表征和沟通多元表征间联系来促进学生对概念的理解。

#2 教学策略是第三大聚类主题。该聚类主要围绕提升学生数学理解水平的教学策略展开,重点围绕教学实践中学生理解水平的达成。例如,李淑文、张同君^[10]通过对“超回归”数学理解模型的分析,提出教学应“螺旋式”地安排知识、丰富学生的数学学习材料,给学生反省的机会和时间。陈琼、翁凯庆^[11]提出促进数学理解学习的主要途径包括:加强新旧知识的联系、抓变式与比较、加强知识系统化等。徐彦辉^[12]在教学实践与问卷调查的基础下提出促进学生探究性理解的策略,即注重体悟学习,注重数学知识发现过程的探索,注重回顾与反思,注重总结与数学推广。

#3 数学语言是第四大聚类主题。该主题围绕关键词“续创概念”“数学符号”“能力培养”等展开。该聚类的研究集中于研究学生对数学符号语言的理解,包括两者关系、现状调查、培养路径等。例如,王志龙^[13]将概念划分为续创概念和新创概念两类,并借助无理数、不定积分等概念的案例,指出应用符号思想及结构思想是理解创新概念、突破“理解障碍”的高效方法。钟珍^[14]调查研究了江西省赣州市高中生数学符号的理解水平,发现高中生符号理解水平普遍较低,但会随着年级的增长而上升,对此提出了六数学符号教学的策略。

#4 表征是第五大聚类主题。该主题围绕关键词“数学情感”“数学理解障碍”“理解层次”等展开。该聚类的研究主要关注学生数学理解的水平划分与理解障碍分析,为数学理解的评价研究提供理论基础。例如,徐彦辉^[15]总结了数学理解的三种基本样态,即记忆性理解、解释性理解和探究性理解,分别对应着“记得、晓得和明得”三种不同状态。李春雷、于凤来^[16]在总结各家数学理解水平划分的基础上,进一步给出了工具性理解、关系性理解、创造性理解和文化性理解四个水平划分。吕林海^[17]基于心智模型和认知表征的视角分析数学理解的内涵,并揭示了学生出现理解错误的三种类型,即表征间联系的缺失、相关表征本身的缺失和对表征加工的深度不够。

#5 数学教学是第六大聚类主题。该聚类主题是指向数学理解的教学实践研究,主要包括“案例研究”“建构主义”“核心素养”等关键词。例如,王新奇

基于数学理解的 EFSTC 过程模型,对“一元二次方程”的概念教学展开设计与实践探索,并提出教学要激活起始经验、加强深度关联和注重综合认识.黄贤明^[18]将数学理解与跨学科项目化学习相结合,将数学理解的 EFSTC 过程模型应用于“多边形的镶嵌”一课的教学设计与实践中,丰富了数学理解的实践探究.赵岩^[19]将数学理解的水平划分应用于二次函数的单元复习教学中,提出了“巧用任务单、创设问题链、开展微项目”的单元复习教学策略.在数学理解的研究热潮中,涌现了一系列指向数学理解的教学研究成果,并逐渐表现出从关注理解走向强调迁移,从强调知识走向发展素养的实践研究趋势.

#6 方法是第七大聚类主题.该主题主要包括“反思学习”“生活体验”“理解水平”等关键词.相比#2 教学策略这一聚类主题,该主题关注于通过某一具体的教学方法来培养学生的数学理解能力.例如,杨利刚^[20]利用几何直观来促进学生的数学理解,具体包括借助几何直观来帮助学生深化数学概念的理解、把握问题的本质、优化解题过程.此外,诸如数学游戏规则的制定、思维导图的绘制等方法都能在一定程度上促进学生的数学理解.

#7 关系性理解是第八大聚类主题.关系性理解是指学习者获得了对数学知识产生的过程与逻辑规律,掌握了知识的本质内涵及其蕴含的数学思想方法.关系性理解最早由斯根普提出,并将其作为数学教学的基本目标,随着国内学者对国外数学理解研究的整理、解读与创新发 展,数学理解的水平分类更为细致,也引起了诸多教育工作者的关注.该聚类主要包含着“关系性理解”“创新性理解”“工具性理解”等关键词,其研究主要关注对理解水平的理论思辨与追求高阶理解水平实践探索.例如,任伟芳等^[21]给出了多层次的数学理解分类,将工具性理解、关系性理解与创新性理解细分,其中关系性理解被细分为证明性、论说性、反思性与结构性理解四类.黄荣^[22]针对学生创新性理解缺失这一现象,提出了促进创新性理解的数学教学策略,包括:从原本问题中把握本质、从整体视野下感悟思想、多元审视中获得灵感等.

#8 思维是第九大聚类主题.该聚类的高频关键词是“理解”“迁移”“认知结构”等,主要关注数学理解的心理过程与思维过程,强调基于认知结构的完善让数学理解的思维真正发生.杨泽忠^[23]提出了数学

理解的心理过程(如图3),即新旧知识形成一种“往”与“反”的过程,进而在知识联系的进程中构建知识网络,形成对新知的数学理解.

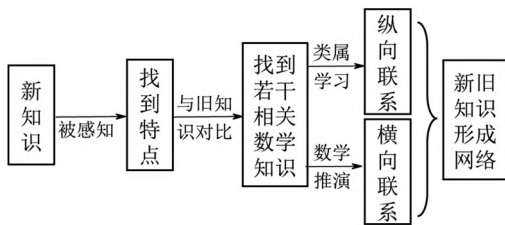


图3 数学理解的心理过程

通过对上述9个聚类的具体分析,经过进一步阅读文献,总结得出我国中小学数学理解领域的研究热点大致归为四个方面:数学理解的过程与水平划分(#0、#1、#7、#8);指向数学理解的教学实践(#5);数学理解能力的培养路径(#2、#3、#6);中小 学 生 数 学 理解水平的调查研究(#4).

四、演化路径

演化路径即研究发展脉络.通过 CiteSpace 软件在关键词聚类图谱的基础上生成中小学数学理解研究领域的时间线图谱,可以进一步分析研究领域内热点主题的演化路径.此外,本研究对文献关键词进行突现性检测,生成如图4所示的关键词突现图谱.

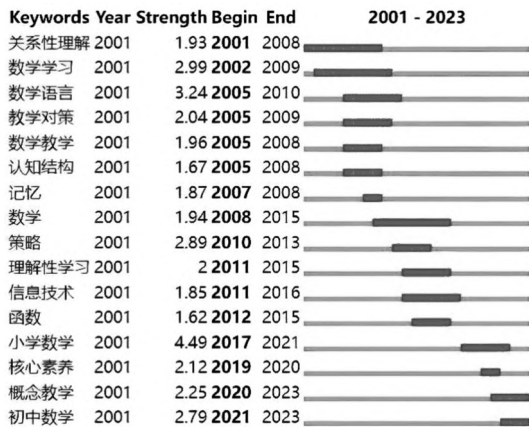


图4 关键词突现图谱

结合图4的结果分析,我国中小学数学理解领域研究大致可划分为三个阶段.

(一)理论探索阶段(2001年—2009年)

我国数学理解的研究早期都是对国外数学理解研究的梳理与反思,尤其是斯根普的数学理解分类模式和“超回归”数学理解模型.该阶段的关键词主要有“数学理解”“理解”“关系性理解”“理解途径”等,相关研究重点关注从不同视角下对理解的解读,进一

步迁移到对数学理解的内涵、价值、功能、水平划分等方面的理论思辨。该阶段的研究以理论论述为主,实践教学研究相对较少。关键词“关系性理解”“数学学习”“数学语言”等是该阶段的出现突显词,说明我国早期的数学理解研究更关注学生数学学习的理解过程,强调培养学生数学理解能力的数学教学,重视对数学知识的关系性理解水平的达成,这与《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》所提倡的“由‘双基’走向‘四基’”的教育理念高度吻合。“关系性理解”突现时间最早,且贯穿了基础发展阶段,体现了我国早期已经开始注重对数学知识的本质性、结构性、整体性教学,强调让学生“知其然,又知其所以然”。

(二) 理论深化与实践起步阶段(2010年—2016年)

该阶段涌现出“理解性学习”“教学模式”“小学数学”“数学情感”等大量关键词,研究呈现多样化发展趋势。在理论研究不断丰富的基础上,国内研究者更重视将数学理解理论应用于教学实践,关注促进学生数学理解的策略、教学模式等,并开始探索数学理解对学生思想与能力的促进作用,包括:数学情感、数学表达能力、阅读理解能力等。部分研究者结合具体的数学教学内容探究了学生数学理解的水平、路径、策略等,为一线教师的教学提供参考。由图4可知,关键词“信息技术”从2011年开始突现,说明以信息技术促进学生数学理解的研究成为该阶段领域内研究者关注的重点,这与《义务教育数学课程标准(2011年版)》中课程基本理论所提出的“开发并向学生提供丰富的学习资源,把现代信息技术作为学生数学学习和解决问题的有力工具,有效地改进教与学的方式”^[24]密切相关。

(三) 实践研究阶段(2017年至今)

在前期数学理解理论研究的基础上,2017年以后出现了大批基于数学理解的教学设计、教学案例等实践研究,并在核心素养导向的背景下,数学理解性学习更关注学生核心素养的发展与创新性水平的达成。从图4中可以发现,“小学数学”和“初中数学”分别于2017年和2021年开始突现,说明数学理解理论在义务教育阶段的课堂教学中广泛应用,成为数学核心素养发展的主要方式,体现了数学理解是发展核心素养的坚实基础,是培育数学思想的前提条件,是涵养数学精神的重要源泉^[25]。

五、研究结论与展望

(一) 研究结论

基于文献计量、文本分析等方法,本研究探究了我国中小学数学理解领域的研究热点、演化路径和未来趋势,发现“数学理解”“理解”“小学数学”“教学策略”等是该研究领域的高频关键词,形成#0 数学理解、#1 理解、#2 教学策略等9个聚类关键词,演化路径大致分为理论探索阶段(2001年—2009年)、理论深化与实践起步阶段(2010年—2016年)和实践研究阶段(2017年至今)。

(二) 未来展望

时代赋予了数学理解新的使命,数学理解的灵动性、范式性、体验性与深刻性决定了其是实现高质量学科育人的崭新路径^[26]。目前我国数学理解研究立足实践、角度多样、内容丰富、成果丰硕,但仍旧会出现诸多同质化研究倾向,且在教学实践研究中,数学理解研究仅仅停留于教师“教”的层面,即关注教师如何设计实施教学来促进学生理解,反而忽视了如何促进学生自主理解这一关键性问题。因此,未来的数学理解研究还应关注以下四个方面。

一是指向数学理解的“教、学、评”一体化研究。纵观国内数学理解研究,研究者大多关注“如何开展数学理解性教学”“如何发展学生数学理解能力”“学生对某个数学对象的理解处于何种水平”等问题,很少将“教、学、评”三者联系到一起,体现教育教学的一致性。因此,在新课程改革的背景下,未来研究可以关注指向数学理解的“教、学、评”一体化研究,探索实现数学理解的新路径。

二是发展学生高水平深层次数学理解的路径研究。从图4可知,“关系性理解”是我国早期数学理解研究的高频突现关键词,但随着时代进步,当今社会更追求综合型人才的培养,仅强调关系性理解水平的培养是远远不够的,这也就意味着如今数学教学要追求学生的数学理解向高水平深层次发展,重视创新性理解水平的达成,强调核心素养、跨学科素养的发展,这也是培养拔尖创新人才的重要方向之一。那么“如何发展学生高水平深层次数学理解”“拔尖创新人才的数学理解思维有何特征、可借之处”“教育数字化如何推进高水平深层次数学理解的实现”等问题将可能是未来数学理解研究的趋势。

三是数学理解视角下的教材开发与研究。教材是

教师教学与学生学习的重要素材,对促进学生数学理解有着不可替代的价值.已有研究表明教学中不同数学史的选取能够对学生数学理解产生不同的影响,包括:解释知识之源、促进意义构建等^[27],这也就意味着教材中不同素材、例题、习题的选取与设置也能够对学生的数学理解产生不同的影响.但目前国内研究者忽视了从数学理解的视角下比较、分析、解读现行版本的数学教材,也缺乏研究者讨论对同一教学内容,教材不同的编写体系下会对学生的数学理解产生何种影响.因此,该方向能为后续数学理解的研究提供些许启示.

四是关注数学文化性理解的研究.虽然我国学者提出了文化性理解这一概念,并将其作为数学理解水平的一大划分,贯穿于数学理解过程的始终,但并没有进一步分析文化性理解的构成要素、价值意义与培养路径,使得文化性理解处于“高评价、低应用”的现状.因此,后续研究可以进一步补充完善上述研究空缺,并尝试在数学德育、数学美育的视域下挖掘文化性理解的育人价值,推进立德树人根本任务的实现.

参考文献:

- [1] 张文辉,王光明.数学认知理解的研究综述[J].曲阜师范大学学报(自然科学版),2005(1):120-124.
- [2] 熊丙章,刘丽颖.数学理解研究综述[J].渤海大学学报(自然科学版),2005(1):39-42.
- [3] 徐彦辉.国外“数学理解”问题研究述评[J].数学通报,2010,49(1):15-18,37.
- [4] 余瑶,张春莉.国外数学理解研究的进展与展望[J].教育学报,2018,14(1):35-44.
- [5] 黄燕玲,喻平.对数学理解的再认识[J].数学教育学报,2002(3):40-43.
- [6] 吕林海.数学理解性学习与教学研究[D].上海:华东师范大学,2005.
- [7] 王新奇.基于数学理解性学习的教学研究:以“一元二次方程”教学为例[J].基础教育课程,2021(9下):49-55.
- [8] 李光树.关于数学知识理解的再研究[J].课程·教材·教法,2017,37(6):49-55.
- [9] 鲁静华.利用多元表征加深对概念的理解[J].基础教育课程,2018(6下):45-50.
- [10] 李淑文,张同君.“超回归”数学理解模型及其启示[J].数学教育学报,2002(1):21-23.
- [11] 陈琼,翁凯庆.试论数学学习中的理解学习[J].数学教育学报,2003(1):17-19.
- [12] 徐彦辉.数学理解的理论探讨与实证研究[D].上海:华东师范大学,2009.
- [13] 王志龙.数学符号与数学理解的关系[J].甘肃高师学报,2005(2):9-11.
- [14] 钟珍.高中生数学符号理解水平现状的调查研究[D].赣南师范学院,2015.
- [15] 徐彦辉.数学理解的三种基本形态及教学启示[J].宁波大学学报(教育科学版),2022,44(5):66-72.
- [16] 李春雷,于风来.数学理解水平的划分[J].数学教育学报,2022,31(4):68-73,97.
- [17] 吕林海.错误分析与数学理解:基于心智表征的分析[J].全球教育展望,2004,33(11):66-70.
- [18] 黄贤明,陈锋.数学理解视域下跨学科项目化学习的实施:以沪科版“多边形的镶嵌”为例[J].中小学课堂教学研究,2023(8):49-53.
- [19] 赵岩.指向数学理解引领单元复习:以“二次函数”单元复习课为例[J].中学数学月刊,2023(8):45-47.
- [20] 杨利刚.从几何直观谈数学理解[J].数学教学通讯,2005(6):26-28.
- [21] 任伟芳,偶伟国,龚辉等.“工具性理解”“关系性理解”和“创新性理解”[J].数学教育学报,2014,23(4):69-73.
- [22] 黄荣.走向促进创新性理解的数学教学[J].中国数学教育(高中版),2018(10):8-10,14.
- [23] 杨泽忠.关于数学理解过程的调查研究[J].数学教育学报,2012,21(6):50-53.
- [24] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2012:3.
- [25] 黄贤明.数学理解的内涵、意义与实现途径[J].江苏教育研究,2023(3/4):124-129.
- [26] 夏世娇,吴仁芳.数学理解的生成逻辑、价值透视与时代使命[J].课程·教材·教法,2023,43(12):110-116.
- [27] 黄贤明,徐敬元.数学理解视角下数学史的价值与选取原则[J].数学教学通讯,2023(10中):7-10.

【作者简介】黄贤明,江苏省苏州高新区景山实验初级中学(215129)。

【原文出处】《中学数学教学》(合肥),2024.4. 15~21

【基金项目】2023年江苏省高等教育教改研究课题“专业认证背景下的师范专业实践教学模式研究”(编号:2023JSJG799);苏州市教育科学“十四五”规划课题“数学理解视域下跨学科教学的实践研究”(编号:2022/LX/02/081/10)。