

【中考解析】

跨学科数学试题的类型与命制原则

——基于2024年全国62套中考数学试卷的研究

顿继安 曹 辰

【摘要】借鉴基于知识功能定位的跨学科主题学习任务分类方式,结合对2024年全国62套中考数学试卷中跨学科试题的分析,本研究将跨学科数学试题分为三种类型:准跨学科型、跨学科知识应用型和模型构建型。不同类型试题的命制体现了数学与其他学科的关系,命制时需从跨学科的视角遵循科学性、公平性和意义性原则。

【关键词】2024年中考数学;跨学科命题;准跨学科;跨学科知识应用;模型建构

《义务教育数学课程标准(2022年版)》在“综合与实践”部分提出了“跨学科主题学习”任务,同时对学业水平考试(以下简称“中考”)命题提出探索命制多学科融合类试题的要求。跨学科学习理念正在对教学实践和考试产生重要影响,2024年全国各地中考数学试卷中也开始出现更多的跨学科试题。

本研究借鉴基于知识功能定位的跨学科主题学习任务分类方式,结合对2024年全国各地62套中考数学试卷中的跨学科试题的分析,梳理出三种跨学科试题类型,并对跨学科试题命制提出应遵循的三条原则。

一、基于知识功能的跨学科数学试题的三种类型

跨学科主题学习任务可以根据知识的功能定位分为“运用知识以解决复杂问题类”和“利用跨学科主题学习来学习知识类”^[1],这也可以作为在跨学科数学试题中其他学科知识功能定位的基本类型。前者对应的试题称为“跨学科知识应用型数学试题”,考查的是综合运用数学和其他学科的知识解决问题的能力;后者对应的试题称为“模型建构型跨学科数学试题”,考查的是运用数学知识和方法探索发现其他学科中蕴藏的规律的能力。此外,还有一类试题的作答尽管不需要其他学科知识,也不以发现跨学科的规律作为问题指向,但也具有明显的跨学科特点,我们称之为“准跨学科型数学试题”。

(一)准跨学科型数学试题

准跨学科型数学试题具有跨学科的情境和一定的跨学科特征,但其他学科的情境与试题的设问

不具有实质性联系,只需要关注其中与设问有关的条件,不需要理解甚至不需要读取试题中给出的其他学科的信息,仅借助数学知识和生活常识即可解决问题。考查“科学记数法”的题目较典型,如试题1。

试题1:2023年10月诺贝尔物理学奖授予三位“追光”科学家,以表彰他们“为研究物质中的电子动力学而产生阿秒光脉冲的实验方法”。什么是阿秒?1阿秒是 10^{-18} 秒,也就是十亿分之一秒的十亿分之一。目前世界上最短的单个阿秒光学脉冲是43阿秒,将43阿秒用科学记数法表示为_____秒。

该题以前沿物理学成果为背景,使得数学问题中的数据有了意义,但作答此题并不需要学生理解情境中的“电子动力学”“光脉冲”等物理概念,而是可以将背景分离后直接看作“43个 10^{-18} 秒用科学记数法可以表示为多少秒”的数学问题。

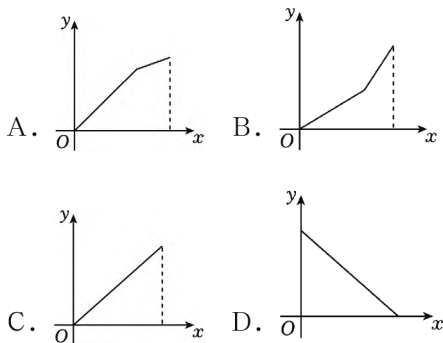
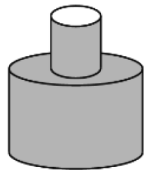
类似的试题在中考数学试卷中并不鲜见,这类试题的背景与数学问题“分离”,未实质性地体现数学与外部的连接,因而不具有跨学科数学试题应该具有的考查“模型观念”“应用意识”等的价值,但它并非没有意义。该类试题可以考查学生“抓住要点,从图文等组合材料中找出有价值的信息”的能力,这种能力是语文课程规定的说明文阅读能力,在数学中当然也很重要;而“发挥情境素材的育人功能”是数学课程所强调的,由试题命题者精心选材设计的准跨学科数学试题中出现的新颖的跨学科情境能够开阔学生的视野,潜移默化地引导教学关注学生综合素养的

提升.

(二) 跨学科知识应用型数学试题

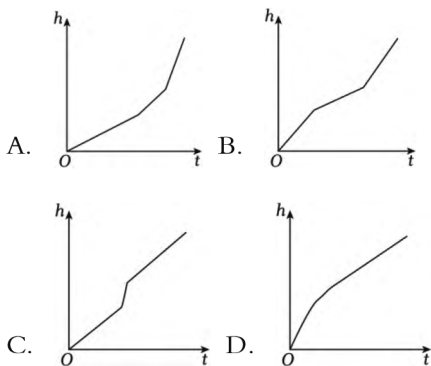
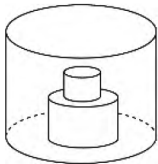
解决跨学科知识应用型数学试题需要用到其他学科的具体知识,即其他学科中的概念、原理等,跨学科知识和数学知识共同构成解决该类问题的基础.与以往相比,2024年全国各地的中考数学试卷中,这类试题数量明显增多,涉及的学科领域也较广泛.其中,有的试题在情境中额外给出了作答所需要的跨学科知识,有的则并未给出,需要作答者调动自己头脑中其他学科的知识.比如,有试题要求学生根据铁的密度值和体积值求质量值,条件中会给出密度与质量、体积的关系式这一初中物理的基础知识.试题2则需要学生自主调动头脑中的物理知识.

试题2:向如图所示的空容器内匀速注水,从水刚接触底部时开始计时,直至把容器注满,在注水过程中,设容器内底部所受水的压强为 y (单位:帕),时间为 x (单位:秒),则 y 关于 x 的函数图象大致为()



“容器注水”是常见的命题情境.但与通常探讨“容器中水面高度与注水时间之间的关系”问题不同的是,试题2涉及物理中的压强.不妨将之与试题2'进行比较:

试题2':如图,一个圆柱体水槽底部叠放两个底面半径不等的实心圆柱体,向水槽匀速注水.下列图象能大致反映水槽中水的深度 h 与注水时间 t 的函数关系的是()



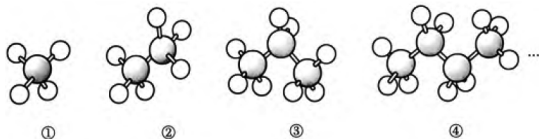
学生通过分析注入水的体积与所占空间的形状的变化即可作答试题2',该题考查的是几何和函数知识.试题2则除了这些知识外,还需要学生理解物理中压强的概念并运用“液体内部的压强与液体的密度和深度成正比”这一原理,试题的跨学科属性明显.

有些试题还会涉及非义务教育阶段的跨学科知识,这样的试题又属于“现场学习型”试题,需要解题者先理解题目中给出的新知,然后再应用其解决问题.如一道具有实际背景的数学试题融合了物理学科,题目中先给出了“不在同一直线上的力的合成与分解法则”,这一法则并非初中阶段所学,学生需要先理解该法则,再应用该法则将实际问题转化为几何问题后作答.

(三) 模型构建型跨学科数学试题

数学是研究数量关系和空间形式的科学,在现实世界和其他学科领域中,说到引入“数学方法”,从根本上看是指对客观事物的数或形方面的特征和关系进行研究,而取得的成果,通常也是用数学语言概括或近似地表达出数或形的结构即数学模型,模型构建型跨学科数学试题指向的就是跨学科问题的数学模型的建构过程.试题3就是一个取材于化学学科的这类试题.

试题3:烷烃是一类由碳、氢元素组成的有机化合物,下图是这类物质前四种化合物的分子结构模型图,其中灰球代表碳原子,白球代表氢原子.第1种如图①有4个氢原子,第2种如图②有6个氢原子,第3种如图③有8个氢原子,……按照这一规律,第10种化合物的分子结构模型中氢原子的个数是()



A. 20

B. 22

C. 24

D. 26

该题以化学中并非初中内容的烷烃的探索作为

情境,但不需要学生理解烷烃的化学性质,只需根据几种特殊烷烃类物质的组成与结构特征的数学规律归纳出一般烷烃物质的组成与结构的数学规律,这种规律可以用来分析、判断、预测其他烷烃物质的存在或结构,类似的方法在研究其他物质时也常用,是数学方法在科学实践中应用的典型案例。

二、跨学科数学试题命制的原则

数学试卷中的跨学科试题是命题者“立足学科、主动跨界”的作品,体现了命题者“自觉主动关联其他课程以实现分科课程实施综合化的努力”^[2]。外在特点是具有现实或科学情境,其评价的主要内容是学生在数学学习中形成的核心素养的发展状况,重点则是评价学生是否具有融合其他学科相关知识和思想方法解决问题的能力。作为新生事物,跨学科命题刚刚起步,还需长期探索。

从今年试题的基本情况和已有研究看,笔者认为,好的跨学科试题的命制并不是简单地在试题中加入其他学科的成分,更不能“为跨而跨”。试题的命制除了要坚持一般数学试题需要遵循的原则外,还要从跨学科的视角考虑其科学性、公平性和意义性。

(一) 科学性原则

跨学科试题会涉及一些其他学科的术语和原理,一些学科前沿研究术语可能比较晦涩难懂,这时命题者就要对其做通俗化处理。因此,试题在表述上一定要认真推敲,做到科学、准确、规范,符合学生认知水平。同时,试题表述要尽可能简洁,避免过长的背景性段落以及可能会引发不同的数学解释的文字出现,增加无意义的难度。一些为了简化计算而给出的并不一定完全真实的数据也要与学科原理基本一致,切忌为学生带来错误的认知。

比如一道以光的折射为背景的试题,给出了光线从空气射入水中的示意图(图 a),要求根据 $\angle 1 = 80^\circ$ 和 $\angle 2 = 40^\circ$ 求 $\angle 3$ 的度数。作为纯数学题,可根据几何知识求得 $\angle 3 = 40^\circ$,但试题是有物理意义的,还需要符合物理原理。如图 b, AB 是法线, $\angle 2 = 40^\circ$ 相当于光的入射角 $\angle AOP = 50^\circ$,根据光折射知识,空气和水的折射率分别约为 1 和 $\frac{4}{3}$,光从空气中进入水中时满

足 $\frac{\sin \angle AOP}{\sin \angle BOQ} = \frac{4}{3}$,据此算出折射角 $\angle BOQ \approx 35^\circ$,因此 $\angle 3 = 15^\circ$ 。这一试题就出现了“跨学科”的科学性问题,要知道物理学的基本方法是基于实验数据的归纳法,试题相当于其中的一组实验数据,随意编制数据则与科学精神相悖。

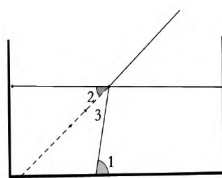


图 a

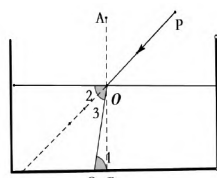
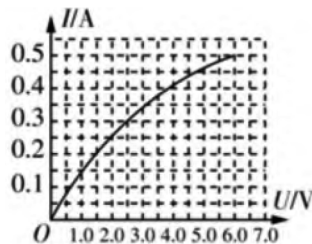


图 b

(二) 公平性原则

学科间最显著的区别就是其特有的知识体系,反映到跨学科数学试题中难免会涉及其他学科的具体概念和原理。与跨学科主题学习中学生可以通过查阅资料、自主学习或较长时间自主探究的方式获得所需跨学科知识不同的是,数学学科考试一般是限时闭卷,还具有高利害性,因此,跨学科数学试题必须遵守“跨学科知识”的公平性原则,要坚守数学试题“考数学”的立场,不宜让其他学科的具体知识的掌握情况成为学生作答数学试题的障碍。不妨比较一下试题 4 和试题 4'。

试题 4: 在“测量小灯泡的电阻”实验中,小红同学根据测出的数据画出了小灯泡的 $I-U$ 图象,如图所示。则由图可知,当小灯泡两端的电压升高时,其阻值_____ (选填“增大”“不变”或“减小”)。



试题 4': 把多个用电器连接在同一个插线板上,同时使用一段时间后,插线板的电源线会明显发热,存在安全隐患。数学兴趣小组对这种现象进行研究,得到时长一定时,插线板电源线中的电流 I 与使用电器的总功率 P 的函数图象(如图 1),插线板电源线产生的热量 Q 与 I 的函数图象(如图 2)。下列结论中错误的是()

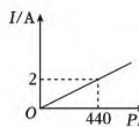


图 1

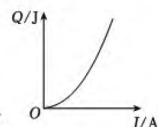


图 2

- A. 当 $P = 440\text{W}$ 时, $I = 2\text{A}$
- B. Q 随 I 的增大而增大
- C. I 每增加 1A , Q 的增加量相同

D. P 越大,插线板电源线产生的热量 Q 越多

两题都以初中物理电学实验中用函数图象表达的规律为背景,但表面相似的背后却有着本质区别:前者需要根据题目给出的函数图象看出 I 和 U 的关系后,再应用 $U = IR$ 这一电学中的关系式推理出 U 随 R 而变的规律特点;后者则只需根据题目给出的信息和对函数图象的理解就可以推理得到结论,并不需要拥有试题中所涉及的 $I - P$ 和 $Q - I$ 关系的知识(尽管这些知识是初中阶段的基础知识)。显然,从跨学科公平性的视角看,试题4不宜作为数学试题——事实上该题是一道物理中考试题,而试题4'则是一道模型建构型跨学科试题,考查的是对经由实验建立的数学模型的意义解释能力。

公平性原则要求命题者在命制跨学科知识应用型试题时慎重选材。若涉及其他学科知识,命题者要研读相关学科的课程标准与教材乃至考试,确保选择的是其他学科中基础性强的重点而非难点的内容。由于顾虑跨学科知识的障碍而在试题中先行介绍的做法,可能会使问题所考查的核心素养水平降阶,还可能降低“跨学科”的意义。“现场学习型”试题则要谨慎考虑是否以高中阶段的知识为题材,否则一些具有超前学习经验的学生将无需“现场学习”,达不到该类问题既定的考查目标,与素养导向的命题理念相悖,甚至还有可能变相鼓励超前学习,违背“双减”精神。

设计试题时,可充分发挥模型构建型跨学科数学试题的优势。即使以义务教育所学内容为题材,这类试题的作答也不依赖于跨学科具体知识,其他学科知识的发现和探索过程可以为试题命制提供丰富的题材,可以着眼于数学试题的本质,将其他学科的试题改编为数学试题,试题4'就是这样的例子。

(三) 意义性原则

意义性指的是试题的设问要与情境有内在的关联,是现实生活或科学领域中真正有意义的问题,能建立数学与其他学科的实质性融合,体现跨学科的真正意义。因此,真正意义上的跨学科试题要遵循意义性原则,需要命题者了解数学在其他学科中的真实作用和价值,了解其他学科的研究者应用数学知识和方法解决的是哪些本学科的真正问题,这样的试题通常会表现出一定的综合性,而基于某一跨学科问题的单一数学成分考查的试题则往往会有“贴标签”之嫌。比如,作为我国古代建筑技术的杰作,榫卯是中考试题中的“常客”,下面就是某地一道试题:

试题6:古代中国诸多技艺均领先世界。榫卯结构就是其中之一,榫卯是在两个木构件上所采用的一种凹凸结合的连接方式。凸出部分叫榫或榫头,凹进部分叫卯或卯眼,榫卯咬合,起到连接作用。如图(略)是一个榫构件的实物图,则它的主视图为() (选项略)

试题以建筑工程领域的榫构件作为考查三视图的情境,考虑了我国优秀传统文化的传播,很有意义。不过,从跨学科试题的意义性的角度看,试题有改进的空间。试题背景中给出的“榫卯咬合,起到连接作用”是榫卯结构的精华,而如何设计或识别具有“咬合”功能的榫卯是建筑工程中的真实问题,背后是“结构与功能”这一小学科学和初中各理科课程都非常重视的跨学科大概念,其数学意义为“榫与卯构件之间具有形和数两个方面的相互影响”,理解起来并不难,从这个角度设计试题,则会大大增加“跨学科”的意义。比如,除了题中榫头实物图外,再给出其带参数的主视图,设问指向与之配套的卯眼主视图的识别,选项给出一些带参数的卯眼的主视图,于是,试题的作答就需要学生基于“咬合”的要求推理出卯眼的形状、计算出符合要求的参数。这样修改后的试题,真实性和意义性增强了,考查的数学能力也拓展为空间想象能力、推理能力和运算能力。当然,试题综合性的增加以及随之而来的素养考查功能的增强,会导致试题的难度也相应增加——实际上,跨学科学习的综合性决定了好的跨学科数学试题必然具有综合性和一定的挑战性,需要命题者在一张试卷的整体设计中为其找到应有的位置。

参考文献:

[1][2] 郭华. 跨学科主题学习: 是什么, 怎么做[M]. 北京: 教育科学出版社, 2023.

【作者简介】 顿继安, 北京教育学院数学与科学教育学院教授; 曹辰, 北京教育学院数学与科学教育学院讲师。

【原文出处】 摘自《基础教育课程》(京), 2024. 8. 11 ~ 16

【基金项目】 本文系北京教育学院重大课题“立德树人教育根本任务的学科育人方式研究”(课题编号: ZD2021 - 01) 成果。