

【学科视点】

数学的德育、智育和美育

——ICME-15 数学教育哲学专题讨论回眸

王萍萍 严亚强

【摘要】通过 ICME-15 的研究成果系统地分析数学的智育和美育的含义、基点、维度和层次,论述数学智育和数学的美育与德育的关系,从哲学的视角阐明正确的数学教育观念。

【关键词】数学教育哲学;数学德育;数学智育;数学美育;ICME-15

一、引言

第 15 届国际数学教育大会(ICME-15)于 2024 年 7 月在澳大利亚悉尼隆重举行,来自 97 个国家和地区的 2300 多名数学教育学者齐聚一堂,共谋数学教育的发展。

作为大会的一个重要部分,全体会议小组的 2 个讨论议题(Plenary Panels)针对数学教育界较具争议的领域,邀请著名学者进行了现场研讨交流^[1]:议题一是“当面对如气候变化、流行病、国际冲突和持续不平等等问题时,除确保各国拥有具有数学素养的公民外,数学教育在伦理和实践方面面临哪些挑战?”,议题二是“数学教育质量的衡量依据是什么?”,均与数学德育、智育和美育有关,这些都属于数学教育哲学的研究范畴。

大会的专题研究组(Topic Study Groups)TSG 5.8 “数学哲学与数学教育”一共贡献了 14 篇论文,其中就有 6 篇研究了数学德育、智育和美育的相关专题,如“数学和谐的体验”“创造力与理性”“数学的态度、假说和自由”“数学伦理实践的规范化”等。

此外,大会的专题调查报告(Survey Team Reports)的 4 个核心主题之一是“数学评价的挑战和展望”,大会 59 个特邀讲座(Invited Lectures)中的若干报告,如我国学者王光明的报告“中小学生数学学习质量智能测量研究的中国经验”、荷兰学者的报告“有意义、相关和包容的数学教育”等,都反映出教育质量在科学、伦理和美学等方面的综合考虑突破了现有数学教育评价的研究思路,成为本次大会的一大亮点。

受 ICME-15 的专题研究组 TSG 5.8 的优秀成果

的启示,本文试图阐明数学德育、智育和美育在育人功能上的一些主张。

德育、智育和美育的问题,是一个教育哲学的问题,上可追溯到 1795 年席勒的《美育书简》和 1861 年斯宾塞的《教育论:智育、德育和体育》以及蔡元培先生 1917 年之文《美育与人生》,而数学教育背景下的德育、智育和美育问题的综合研究最早是 1992 年的《漫谈数学教学中辩证法因素的德育、智育、美育功能》^[2]。

今天我们所看到的数学教育实践中的种种偏差,几乎都与对数学的德育、智育和美育的认识不清有关。早在三年前,华东师大的顾泠沅和徐斌艳两位教授就在 ICME-14 大会报告上提出“成绩上去了,学生不聪明怎么办?”“近几年的数学认知水平正在不断下降”等严峻问题,可见数学教育远非“因数而智”这么简单,而是应从科学、伦理和美育的角度进行评价的一门综合性学科。

张奠宙先生在二十年前就厘清了数学学科德育的含义、基点、维度和层次等问题^[3-4],这些研究不仅系统解决了数学德育的内容和结构,而且可以说是为教育评价的维度分析建立了逻辑框架。本文将借用这个框架讨论数学智育和数学美育。

二、张奠宙的数学德育思想

张奠宙关于数学德育的研究最早可见于专著《数学学科德育的理论与实践》,后又集中体现在教材《数学教育概论》^[5]中。他认为:确定数学德育的一个基点是“喜欢数学”,三个维度是“人文精神、科学素养和道德品质”。因为,“衡量一个数学教师实施德育是否成功的基本标准是‘学生是否热爱数学’”“一

个学生能够从喜欢数学开始,进一步热爱是非分明的数学真理,追求数学理性的科学精神,接受数学真善美的熏陶,崇敬数学先贤的伟大贡献,数学德育的基本要求也就达到了”。反之,“如果学生只是奉命学习数学,为功利学习数学,甚至讨厌数学,那就什么都谈不上了”。

张奠宙提倡“从数学本身的价值中体现其道德价值,数学的智育和德育做到真正的融合”,反对“从数学外部硬性赋予德育功能”。他发现德育的渠道主要有三个方面:一是权威的指导和道德教育;二是社会和舆论的行为规范;三是文化的熏陶(学校教育、民俗传统、文学艺术、科学意识等等,无声地感染人们的心灵)。“数学是一种文化,因而数学教育是第三渠道中的一部分,能给学生以某种文化熏陶。”“既然只是一种文化熏陶,数学教学的德育功能就是有限的,不能指望通过数学教学使学生养成完善的人格,但是……数学可以在很大程度上使人脱离低级趣味,具备健全的思维品质和道德取向。”

于是,张奠宙阐明的数学德育的六个层次有横向和纵向两个维度,横向是“从数学本身的文化到本身的数学美”,纵向是从数学哲学到“并无太多数学特征的课堂文化”,具体是:层次1,数学本身的文化内涵,以优秀的数学文化去感染;层次2,数学内容的美学价值,以特有的数学美去陶冶;层次3,数学课题的历史背景,以丰富的数学发展史去激励;层次4,数学体系的辩证因素,以科学的数学观去指导;层次5,数学周围的社会主义现实,以昂扬的斗志去鼓舞;层次6,数学学习的共同体环境,以优良的互助文化去塑造(图1)。

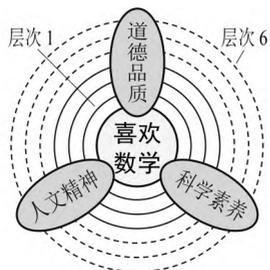


图1

这六个层次,层次1~2源于直接的数学内容,是微观的课程学习中容易感悟的;层次3~4是接触了宏观、系统的数学观才能实现的;层次5~6是在数学学习的良好环境中形成的。张奠宙先生在文[4]中对每个层次都举了例子,读者可从中进一步了解。

从下面的分析中可以清楚地看到,数学德育是与数学智育和美育相辅相成、协调同步的。

三、数学智育

(一) 数学智育的内涵、基点和维度

智育,就是提高才智、发展智力的教育。根据2022年版《辞海》对智育的描述,智育是“全面发展教育的重要组成部分。基本任务是:传授哲学、自然科学和社会科学的基础知识和基本技能;发展学生认识能力,包括思维品质、方法、策略等;提高学生综合运用知识解决问题、进行创造性活动的能力。”^{[6]2938}值得注意的是,曾出现于1999年版《辞海》的“使学生热爱学习、善于学习、乐于学习,以适应社会对人智能的要求”从“智育”的释义中删除了,这说明智育、德育和美育的“难分难舍”。习惯上,智育的内容就是传授知识、形成技能、发展智力、培养学习兴趣和习惯这四个方面。

智育的渠道主要有两个方面:一是家庭和社会的环境影响,包括独立精神和自由思想的熏陶;二是正规的学校教育,其中也有两种典型的教育方式,其一是“伯乐”对于天赋异禀的“千里马”的教育(精英教育),其二是普通的文化教育(大众教育)。这里只讨论大众化的学校课程教学。

学校大众化智育的渠道也可以归为三个方面:知识、能力、态度。这也就是当代中国数学教育正在逐渐认清的事实——核心素养。因为“素养”一词就由这三个方面构成。我国从2000年开始废除数学“教学大纲”,启动“课程标准”的研制,将数学教学由“教的目标”转向“学的目标”,开始出现知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观的“三维目标”。北京师范大学林崇德组织国家重大课题组对“素养”进行了研究^[7],经过近10年的发展,教育界基本上达成了共识:“知识”(通俗地说就是文化知识)的教育是学校智育的载体,它是指基础知识和基本思想两个方面的理论知识;“能力”是思维能力和才智的总称,它包括各种层次的思维能力,也包含基本技能、基本活动经验在内的应用和创新的实践型智能;“态度”是情感态度和价值观的总称,是跨越于智育、德育和美育之间的一种表现形式。

数学学科智育是通过学校里的数学教育(主要是数学课堂教学)所实施的智育活动。其基点是数学兴趣,也就是喜欢数学。这也是衡量一个数学教师实施智育是否成功的基本标准,因为只有对数学产生兴趣,才能调动奥苏贝尔所说的“内驱力”,形成数学活动中的自我效能感和意志力,进而通过数学提高才智和发展智力。

因此,数学相关的智育有文化知识、思维能力、实

践经验、情感态度四个维度。

本次 TSG 5.8 交流中, Y. Horihata 对“数学态度”的见解令人耳目一新:“通过数学获得一种数学态度,就有可能认识和接受具有不同价值观的人(这也可以说是对那个人的假说)。这是因为理解和承认另一个人的行为意味着移除(改变)一些自己的假说和采用其他人的假说……一旦接受了他人的假说,与其交流也就有了可能。因此,培养一种数学态度使我们有可能去理解并与那些有着不同价值观的人交流,从而意识到自己的偏见,并采用更好的价值观,就有可能拥有更自由的思想。数学态度也是向别人学习的必要条件……此外,数学态度通过将‘自己与他人’价值观的相对化来培养平等的精神。”^[8]

(二) 数学智育的层次

数学智育的层次也可以从课标中找到线索,毕竟课标里大多数是对智育的要求。

层次 1: 数学知识的内容和结构, 建构对基础知识的基本认知; 层次 2: 数学的方法和技能, 建立分析问题和解决问题的思维基础; 层次 3: 数学思想和核心素养, 养成用数、符号、模型进行表达和交流的思维习惯, 形成抽象、推理、运算、几何直观和数据分析等理性思维; 层次 4: 数学应用和活动经验, 养成联系的思维习惯, 形成数学应用与建模、数学实验^[9]等数学素养, 体验实践在认知过程中的作用; 层次 5: 数学文化, 从数学之史、数学之用、数学之趣和数学之美等角度形成情感、态度和价值观, 养成与数学相关的人文素养; 层次 6: 数学发现和提出问题, 培养勇于探索的科学精神, 利用数学眼光、数学语言和数学思维等实践基础, 发展对数学的好奇心; 层次 7: 数学创造, 形成抽象、批判和反思的哲学思维, 并用于输出数学成果; 层次 8: 数学的处世方式, 将数学的高阶思维和哲学思维应用到美德伦理中, 规范自身行为, 指导或影响社会的文明发展。

以上 8 个层次, 既是思维层次由低到高的数学表现, 又是与数学的“距离”由近及远的划分, 是对数学智育研究成果的总结^[10]。其中, 层次 1~2 是基本智能, 层次 3~4 是数学素养, 层次 5~6 是情感态度和人文素养, 层次 7~8 是数学创造和哲学思维。曹一鸣指出:“当代数学教育要重视知识、理论、方法、技能和应用, 密切联系生活, 培养学生用数学的意识和创新能力。”^[11]康玥媛、曹一鸣从认知要求的视角审视中、美、英、澳、芬、新六国义务教育阶段的数学课程标准, 研究发现: 识记、程序性操作、表达、数学推理、问题解决、联系是课程标准的共同要求, 我国关于表达、

联系和问题解决类的认知要求均少于其他五国。其中“联系”是指数学内部知识之间的联系、数学与其他学科之间跨学科的联系, 以及联系实际问题的, 即将数学知识与校外生产、日常生活相联系。这种高水平认知是实现高层次智育目标的必要条件。但是, “我国对‘联系’类要求有所不足”^[12]。

(三) 数学教学与智慧发展

众所周知, 应试能力和智慧不是同一回事, 后者主要表现在表达、推理、联系和创造等方面的能力。章建跃教授的观点^[13]可以帮助我们更好地分析“智慧发展”的问题:

(1) “知识的意蕴就是知识所蕴涵的理性内涵, 包括知识的价值、知识的精神、知识的情感等, 它是知识的精义和主旨所在。”所以教师应基于统摄的哲学认识(逻辑起点、思维工具、真理性等数学哲学观念), 理解数学对象、性质、地位与作用的数学核心概念和思想方法, 再分解到“双基”教学; 同时应该帮助学生实施相反的认识过程, 即具体事例→个别规律→一般规律→思想、观念。应“发挥核心概念及其反映的数学思想方法的引领作用”。(TSG 5.8 中 G. Riva 和 E. Rottoli 恰好也讨论这个问题, 他们称这两个方向的过程为“哲学实践”和“教学实践”^[14]。)

(2) 思维是指理性认识, 数学思维可以概括为一个结构(定义概念—推导性质—建立联系—实践应用)、两个方向(归纳和演绎)、三种语言(符号语言、图形语言、普通文字语言)、四种形式(逻辑推理、代数运算、几何直观、数形结合), 它们是一棵参天大树的根和主干。它所形成的枝叶(数学内容和方法)是人类智慧的最精彩的绽放, “当前课堂教学中普遍存在的问题是, 把注意力集中到了‘枝繁叶茂’的追求, 而忘却了‘根和主干’的重要性。”教学中应该注重数学思维的完整性(纵向联系和横向关联)、系统性(整体观和全局观)和创新性(发现问题和提出问题)。

(3) 在具体的教学方法上, 教师“要使学生掌握研究一个数学对象的具体方法”(数学探究), 要让学生感悟“数学方法因解决问题的需要而产生”(再创造), “要使学生会用数学语言思考和表达”(交流), 要“加强用数学解决实际问题的教学”“在探寻前人解决问题的足迹中增长智慧”, 要“限制课堂容量, 延长知识获得过程, 给学生‘悟’的时间”。

郑毓信教授归纳了很多哲人对智慧的理解^[15]¹⁶⁰, 以下是部分摘录:

“单纯传授知识的教育是一种结果的教育、继承的教育, 培养智慧的教育是一种创新的教育, 创新的

教育更多的是一种过程的教育……教学不仅要教给学生知识,更要帮助学生形成智慧.知识的主要载体是书本,智慧则形成于经验的过程中,形成于经历的过程中.”^[16]

“智慧的教育”不应被等同于经验的简单积累,而应当更加强调数学思维由较低层次向更高层次的发展.我们也应明确肯定“数学智慧”的反思性质,“只要儿童没能对自己的活动进行反思,他就达不到高一级的层次.”^[17]

斯根普提出了关于“习惯性学习”和“智慧性学习”的区分^[18]，“智慧性学习”不是发生在行动之后,而是先于行动,这就使得我们有可能在各种不同的环境达到各种不同的目标.由于“智慧性学习”主要依赖于由实际经验抽取出概念和借助于语言对此进行操作的能力,因此,这就是人类特有的学习方式,并构成了人类优于其他动物的主要原因.斯根普还曾具体提及,数学学习是95%的“智慧性学习”辅以5%的“习惯性学习”,这事实上清楚地表明了数学学习对于人类智慧发展的特殊意义.

郑毓信认为,与传统的“刺激—反应”模式相比,由美国著名心理学家加涅给出的关于人类行为的模型(图2)更为合理.特别是,由此我们可以清楚地认识思维活动的层次性;相对于外部信息的接受和主体的适当反应而言,“期待”和“执行控制”属于更高的层次——如果借用人工智能的术语,后者可被认为构成了所谓的“指导系统”,而这又可被看成人类智慧的集中表现,即具有高度发展的“指导系统”……以下则是数学教育的主要使命:我们应当通过数学教学让学生一天比一天更加智慧,一天比一天更加聪明,即应当努力促进学生思维的发展与理性精神的养成^{[15]257}.

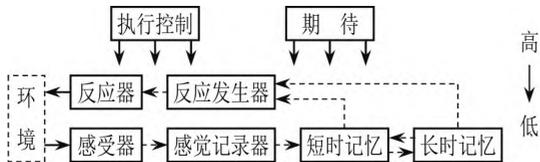


图2 思维活动的层次

四、数学美育

《辞海》云:美育亦称审美教育、美感教育,是关于审美与创造美的教育.美育通过对艺术美、自然美、社会美的审美活动和理性的美育教育,使人树立正确的审美观念,培养健康的审美趣味,提高对于美的欣赏力与创造力.美育是教育事业的一个有机组成部分,是美学的目的之一.艺术有其特殊的审美感染力

量,是推行美的重要途径^{[6]1535}.

我国的数学课程标准中,“认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值”^[19]和“对数学具有好奇心和求知欲,了解数学的价值,欣赏数学美,提高学习数学的兴趣,建立学好数学的信心,养成良好的学习习惯,形成质疑困难、自我反思和勇于探索的科学精神”^[20]就蕴含着数学德育和美育的要求.按照张奠宙对数学德育的分析逻辑,经过70多位数学一线教师和专家提供意见,我们将数学美育的内容框架归纳如下:

美育的途径有理性教育和审美活动两个方面.在数学教育中,理性教育就是教师主动地指导正确的审美观念、数学美(包括数学思想方法)的欣赏;而审美活动则是通过学生的数学实践活动培养健康的审美趣味,提高欣赏力和创造力(艺术设计、创作能力等).因此,数学美育的基点仍然是“喜欢数学”,数学美育的维度可以划分为以下三部分:审美趣味、美的创造、美的感染.审美趣味包括美的观念和标准(美的含义和真善美的价值观)、美的观察和评价;美的创造是指基于美的要求的知识应用、艺术设计和创作等;美的感染是指数学美育在与数学德育和数学智育相互联系和渗透中,发挥人性美的力量.

数学美育具有独特的内容、方法和效能.在“培养全面发展的人”的教育中具有特殊的意义.

数学美育有五个层次.层次1:数学知识中的数学美,理解知识之美和方法之美.学生通过数学知识、技能和方法的教学,初步形成美的观念,理解数学美的形式和方法.层次2:数学文化中的数学美,感悟思想之美和文化之美.学生通过数学思想的明示和暗示,欣赏数学更深层次的美,理解数学美在改造人性、发展文明中的作用.层次3:数学应用中的创新之美.通过应用和建模、数学写作等实践活动,形成创造美的能力.层次4:数学教学互动中的感染之美.在课程的编排和教学实施中,课程的理念、教材的框架和形式、教师的风格和品德带给学生感染的力量.层次5:数学德育中的心灵之美,实现真善美的德育目标.这是离数学概念最远的,通过美的教育和美的活动,形成求真务实的品质、美德伦理的精神、追求完美的思想.

这五个层次可以分为三类:层次1~2属于数学内容中的审美趣味,层次3是数学应用和实践中的美感,层次4~5属于课程实施中由智育和德育形成的人性之美的升华.

数学的学习和研究是有个“美学标准”的,即使

没有上升到德育的高度,数学美育也是不可或缺的。哈尔莫斯曾说:“数学是创造性的艺术,因为数学家创造了美好的新概念;数学是创造性的艺术,因为数学家像艺术家一样地生活,一样地工作,一样地思索;数学是创造性的艺术,因为数学家这样对待它。”^[21]

在本次 TSG 5.8 中,E. Allahyari 交流了《体验数学和谐:一个现象学方法》^[22],他把体验到了数学的快乐和美丽称为体验到了数学和谐(Mathematical Harmony)。

五、数学德育、智育和美育中的几种偏见

对于数学德育三维度,人们往往认为科学素养是“占比再多也不为过的”,因为社会上出现了很强的“对科学的崇拜,对科学的神化”的现象,有人断章取义地指出人文精神和道德品质的要求使“数学教育承受着无法承受的负担”,要知道独立、自由、追求完美的精神才是通过数学培养“成人”的真谛。正如拉图尔所说,我们应当“利用人文学科之确定性来揭露自然科学和科学主义的虚伪自负”。^[23]

新加坡是数学教育非常发达的国家,世界上数十个国家都使用新加坡的数学教材。新加坡教育部提出“思考的学校,学习的国家”的口号,其数学课程框架的五边形模型(图3)的上面两个元素(态度和元认知)就富含美育和德育精神。



图3 新加坡数学课程框架的五边形模型

我国经过几十年的课改,数学课程标准已经将融合智育、德育和美育的目标阐述得非常周全。相对来说,数学课程标准中的智育要求是核心部分。问题在于,有些教师认为数学教育的全部内容就是数学智育,因而“情感、态度和价值观”这种“非智力因素”就得不到重视,而这正是德育和美育之所在;更有教师认为,考试成绩(如中考分数)就是检验智育成败的标准,于是应试教育方式大行其道,而这就远离了“智”的本意。有人把教育的内容归于“奶”和“蜜”两个字,前者是指知性教育,后者指诗性教育,即精神成长;前者是智,后者是德与美。

数学教育的实践中往往有人认为数学美育对智育发展是没有多大意义的。这次 TSG 5.8 中 B. Cz-

arnocha 介绍了他关于创造力和艺术与非理性的关系的研究^[24]。诺贝尔奖获得者斯佩里的左右脑功能分工图可以更直观地说明他的观点(图4):左半脑主要担负分析任务,如逻辑推理、数学计算、写作等;右半脑则与空间概念、识别、构思、音乐、颜色的辨认以及直观思维和创造能力有关。如果过分强调逻辑思维的训练,右半脑的功能就不可能得到充分发挥,从而也就不利于创造能力的培养,因为这些行动都是由右半脑指挥的。与此相对照,如果我们有意识地加强美的鉴赏能力,右半脑的功能就可得到充分发挥,从而自然也就有利于创造能力的培养。又由于左、右半脑在生理机制上是互相联系的,因此右半脑的发展也有利于左半脑的发展,进而促进抽象思维及分析能力的培养。“我们不仅应当加强对于数学美的欣赏,也应努力提高整体性的艺术修养。尽管音乐、绘画和文学欣赏等并不能给数学学习与研究以直接的帮助,但却可以拓展人们的文化视野,丰富他们的想象力,提高他们的审美情趣……总之,我们既应加强逻辑思维的训练,努力提高抽象思维的能力,又应注意培养学生的数学直觉,培养他们对于数学美的鉴赏能力。”^{[15]68}

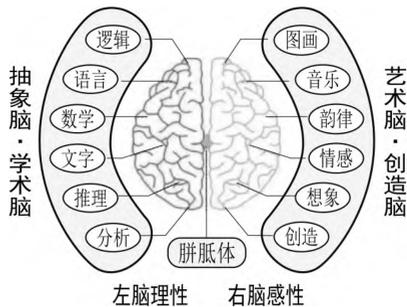


图4 左右脑功能分工图

六、结论

数学的德育、智育和美育的每一部分都是数学教育中不可缺少的。它们实际上分别联系着伦理、科学和美学的文化领域,也关系到知、情、意的完整人格,体现真、善、美的价值标准。张奠宙先生说:“数学的智育和德育做到真正的融合,才是我们努力追求的目标。”让我们通过著名数学史学家 M. 克莱因的言语来理解这三者的融合:“数学是一种精神,一种理性的精神。正是这种精神,激发、促进、鼓舞并驱使人类的思维得以运用到最完善的程度,亦正是这种精神,试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活;试图回答有关人类自身存在提出的问题;努力去理解和控制自然;尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻的和最完美的内涵。”^[25]

TSG 5.8 中 C. Buell 和 V. Piercey 建议给数学教师进行伦理学培训, 加强他们对数学实践的力量和责任的理解, 同时也通过伦理学视角, 让数学框架为社会、文化、经济和政治目标的整合而服务^[26]. 与此同时, M. Marciniak 在《基于流行病和技术发展对未来范式转变的预测》^[27]中呼吁, 由于孩子在十多年的学生生涯中科技进步日行千里, 教育范式不应僵化, “教师应该依靠自己的创造力, 而不是依靠现成的教科书, 因为他们的工作需要对不断变化的范式立即做出反应. 教师应该从那些有创造力并且重视学生创造力的人中挑选, 因为这是在迅速变化的教育环境中保证成功的唯一技能…… 应调整评价制度, 以适应教学范式在学生教育过程中的巨大变化”.

参考文献:

- [1] 15th International Congress on Mathematical Education [EB/OL]. [2024 - 07 - 14]. <https://icme15.org/icme-15-scientific-program/icme-15-plenary-events/>.
- [2] 徐南昌. 漫谈数学教学中辩证法因素的德育、智育、美育功能[J]. 中学数学, 1992(9): 4 - 7.
- [3] 张奠宙, 叶政. 课堂教学中进行思想品德教育的六个层次[J]. 上海教育, 1999(5): 32 - 34.
- [4] 张奠宙. 数学学科德育的基点和层次[J]. 数学教学, 2006(6): 封二, 1 - 2.
- [5] 张奠宙, 宋乃庆. 数学教育概论[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2016: 107 - 112.
- [6] 辞海编辑委员会. 辞海(第七版·缩印本)[M]. 上海: 上海辞书出版社, 2022.
- [7] 林崇德. 21世纪学生发展核心素养研究[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2016: 前言.
- [8] HORIHATA Y. Mathematical attitude, hypotheses, and freedom [EB/OL]. [2024 - 07 - 14]. <https://icme15-c10000.eorganiser.com.au/data/clients/1/773/submissions/175165/abstract.pdf>.
- [9] 喻平. 教育教学评价问答(2)[J]. 中学数学教学参考, 2022(3中): 1.
- [10] 丁益民, 孙学东, 章飞, 等. 中学数学学科重点选题研讨纪实[J]. 教育研究与评论, 2024(2): 25 - 32.
- [11] 曹一鸣. 数学教育价值观的嬗变与重构[J]. 教育研究, 2005(12): 72 - 75.
- [12] 康玥媛, 曹一鸣. 小学、初中数学认知要求的国际比较——基于中、美、英、澳、芬、新六国课程标准的研究[J]. 教育科学研究, 2016(1): 65 - 70.
- [13] 章建跃. 数学学习与智慧发展[J]. 中学数学教学参

考, 2015(7中): 4 - 10; 2015(8中): 4 - 11.

- [14] RIVA G, ROTTOLI E. Philosophical and didactic practice in dialogue [EB/OL]. [2024 - 07 - 14]. <https://icme15-c10000.eorganiser.com.au/data/clients/1/773/submissions/172974/abstract.pdf>.
- [15] 郑毓信. 新数学教育哲学[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2015.
- [16] 史宁中, 马云鹏. 基础教育数学课程改革的设计、实施与展望[M]. 南宁: 广西教育出版社, 2009: 序言.
- [17] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 上海: 上海教育出版社, 1995: 119.
- [18] SKEMP R. The psychology of learning mathematics [M]. Enlarged edition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc., 1987: 101 - 138.
- [19] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 8.
- [20] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 11.
- [21] 斯蒂恩. 今日数学——随笔十二篇[M]. 马继芳, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1982: 26.
- [22] ALLAHYARI E. Experiencing mathematical harmony: A phenomenological approach [EB/OL]. [2024 - 07 - 14]. <https://icme15-c10000.eorganiser.com.au/data/clients/1/773/submissions/174890/abstract.pdf>.
- [23] 拉图尔. 我们从未现代过: 对称性人类学论集[M]. 刘鹏, 安涅思, 译. 苏州: 苏州大学出版社, 2010: 41.
- [24] CZARNOCHA B. Creativity and reason [EB/OL]. [2024 - 07 - 14]. <https://icme15-c10000.eorganiser.com.au/data/clients/1/773/submissions/173202/abstract.pdf>.
- [25] M·克莱因. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵, 译. 北京: 商务印书馆, 2020: 前言.
- [26] BUELL C, PIERCEY V. Normalizing ethical practice of mathematics through engagement with ethical reasoning in STEM-wide higher education [EB/OL]. [2024 - 07 - 14]. <https://icme15-c10000.eorganiser.com.au/data/clients/1/773/submissions/172581/abstract.pdf>.
- [27] MARCINIAK M. Predictions of future paradigm shifts based on pandemic and development of technology [EB/OL]. [2024 - 07 - 14]. <https://icme15-c10000.eorganiser.com.au/data/clients/1/773/submissions/173728/abstract.pdf>.

【作者简介】王萍萍, 苏州大学东吴学院(215006); 严亚强, 苏州大学数学科学学院(215006).

【原文出处】《中学数学月刊》(苏州), 2024. 8. 1 ~ 6