

【教学研究】

一般观念统领下的单元起始课 “单项式乘单项式”教学路径研究

叶琳 浦叙德

【摘要】一般观念统领下的结构化教学是发展学生核心素养的重要途径。当前单元起始课教学还存在一些问题,文章结合“单项式乘单项式”课例,阐明单元起始课的重要教学价值,尝试给出单元起始课的教学路径:(1)研读课标,剖析育人价值;(2)解读教材,把握教学内容;(3)分析学情,确定教学起点;(4)创设情境,提出研究问题;(5)活动探究,感悟研究方法;(6)搭建结构,明晰一般观念。在价值引领下按教学路径实施,共同促进学生的意义理解和自主迁移,建构全方位、全过程育人的理想图景。

【关键词】一般观念;单元起始课;教学价值;教学路径;单项式乘单项式

一、单元起始课的教学现状

当下,随着《义务教育数学课程标准(2022年版)》(下称《课标2022》)的深入实施,课堂教学逐渐由学科知识的获得走向学科素养的培养,实现从知识本位到素养本位的转型。素养导向的单元教学宜采用“整体—部分—整体”的教学策略,注重观念统领和内容结构化,这不仅是落实立德树人的必然要求,也是学科核心素养落地的关键路径。在实践层面上,尽管单元整体教学已经引起广大教师的关注,但是由于缺乏单元教学的起始课、章中课、章末课等课型的具体实践与经验提炼,教师对如何进行单元整体教学依然存在诸多困惑。以单元起始课教学为例,教师对教材章头图或章前言的先行组织者作用认识不够,通常直接进入第一节的概念教学,存在“表演”与“虚无”等教学倾向。课堂教学仍停留在关注陈述性、程序性知识学习的阶段,对“为什么学”“学什么”“怎么学”这一单元缺乏应有的认识,对教学的思考缺乏整体性、思想性与系统性,这些问题成为教师进行教学设计和课堂教学的现实羁绊。如何基于观念统领实施单元整体教学,是当前教学改革亟须解决的问题。

2023年3月无锡市初中数学新课标培训活动在西漳中学举行。活动主题聚焦单元起始课教学,上课教师围绕“整式乘法与因式分解”单元起始课“单项式乘单项式”(苏科版)进行同课异构。与会教师就如何帮助学生对所学内容建立起比具体知识更加上位的整体性、结构性的认识展开交流研讨,会后大家对

单元起始课教学有了较为深刻的认识。本文尝试在一般观念统领下,从单元整体教学的高度,给出单元起始课的教学路径,供读者参考。

二、单元起始课的教学价值

单元起始课承载着知识、方法、观念、价值、兴趣等“多位一体”的引领作用,是在一般观念统领下对单元整体的结构性展望。单元起始课除了传授起始课的知识外,更重要的是发挥先行组织者的功能与价值,激发学生学习的兴趣,让学生在学习具体内容前可以对整个单元的研究框架和路径、研究策略和方法建构起整体性的认识。

“单项式乘单项式”是整式乘法与因式分解单元的起始课。教学中不仅要把握本课的重点(法则的产生与运用过程),而且要把握本课的章首功能(提供本章及后学内容的知识发展框架)、研究范式(计算、观察、猜想、归纳、验证),让学生可以充分认识到学习整式乘法的重要性与必要性,形成主动学习、乐于学习的心理倾向,初步体会学习代数运算律的思路与方法,认识到代数的核心就是数学运算和运算律,充分感受数学理性精神的熏陶。这正是整式乘法与因式分解单元起始课的教学价值所在。

三、单元起始课的教学路径

教师在进行教学设计时,需要充分认识教学内容的知识传播价值与育人功能,了解学生的身心特点和已有知识储备,掌握基于特定知识与学情的具体教学策略。基于一般观念统领并借鉴已有研究^[1],本研究

在理解数学、理解教材、理解学生、理解教学的基础上将单元起始课教学路径分为以下6个环节:(1)研读课标,剖析育人价值;(2)解读教材,把握教学内容;(3)分析学情,确定教学起点;(4)创设情境,提出研究问题;(5)活动探究,感悟研究方法;(6)搭建结构,明晰一般观念。在价值引领下按此教学路径实施,促进学生的理解和自主迁移(图1)。

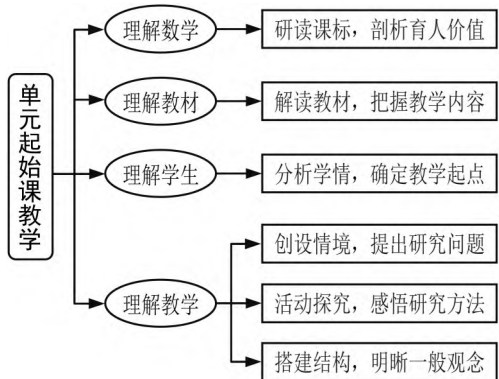


图1

(一) 研读课标, 剖析育人价值

课程标准是教材编写、教学设计、课堂实施和学业评价的重要依据,也是教师整体把握教学内容,进行教学设计的基准。教师的课堂教学理念与目标均应源于课程标准,将课程标准、学生特点、教材特征三者有机结合。在研读课标的基础上对单元所学内容的地位和作用进行深入分析与精准定位,可以帮助学生掌握结构化、联系紧密、易于迁移的知识,同时形成有内在联系的知识网络、认知结构、逻辑结构和思维体系。

《课标2022》指出,数学教学要强调整体性和联系性,这是数学学科的特点,也是数学学习和学生认知的需要。整式乘法与因式分解单元的课标和学业质量要求为:“能进行简单的整式乘法运算(多项式乘法仅限于一次式之间和一次式与二次式的乘法)。”^[2]本单元主要研究整式乘法和因式分解。从单元的视角看,图形的面积章头图关注了图形与代数的关联。根据“数式通性”,从“数”的视角看,可以关联有理数单元数的乘法;从“式”的视角看,可以联想到整式的加减、特殊的整式的乘法幂的运算;从更广义的“式”的视角看,还可以关联“同底数幂的除法”;从后续分式奠基的角度看,还可以联想分式的除法。

(二) 解读教材, 把握教学内容

当前,教材的编排特征和分课时教学现状让数学的整体性变得“断裂而隐蔽”,教师对教材蕴含的知识价值、科学价值、思维价值和文化价值的解读也不

够充分。受应试环境的影响,教学的重心还是落在知识与技能维度。充分重视教材中蕴含的宝贵资源,对师生单元意识的获取大有裨益。教材是连接“课程目标”与“教学实践”的重要桥梁,是学生学习知识、感悟方法、发展素养的主要载体。教师只有掌握教材解读方法,提升对数学教材理解及运用的专业水平,把握教材立意与内容逻辑,从育人角度创造性地使用教材,才能使课堂呈现素养为本的教学新样态。

按照从简单到复杂、从局部到整体的基本思路,教材素材可以分为微观的局部素材、中观的课时素材和宏观的单元素材三部分。通过“抽象、推理、模型”式局部解读、“点全、线联、面融”式课时解读、“知识、方法、素养”式单元解读三种方法^[3],对教材中的学科育人元素进行有效设计与课堂教学。以中观的“点全、线联、面融”的教材解读为例(图2),具体设计一节课时,教师需要关注教材的前后联系,如本课知识的源流与知识体系中的价值等。“点全”指在厘清本课时知识的基础上,加强对所教知识纵向与横向的显性认识,弄清知识的源与流及相关概念的内涵与外延,从而系统认识本课时涉及的知识;“线联”指解读出课时中的知识明线和数学思想方法暗线,即建立知识的产生、形成、应用、发展过程及知识背后的思想方法之间的联系,架起显性知识技能与隐性思想方法明暗两线的桥梁,组成方法路径与解决问题的双翼;“面融”指对课时分别从知识明线、方法暗线、素养主线三个层面考虑,通过知识面、方法面、素养面的有机融合,强调知识、方法、素养的整体性。

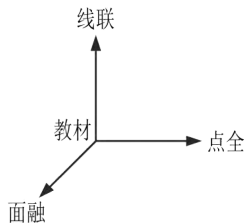


图2

单元起始课可以通过“明方向—教方法—学知识”的宏观、中观、微观层面加以落实^[4]。从整式乘法与因式分解单元章头图可以看出,本章的知识明线清晰,依序为单项式乘单项式、单项式乘多项式、多项式乘多项式、乘法公式以及因式分解;从方法暗线看,单项式乘单项式法则的学习是从特殊到一般的归纳,既有运算、观察、猜想、归纳、证明等代数推演,又有通过几何拼图验证获得的数形结合思想等。作为单元起始课,单项式乘单项式的学习为后续单项式乘多项式、

多项式乘多项式的学习提供了方法引领.特殊与一般是数学研究的常见方式,本单元可以研究特殊的多项式乘法;乘法公式、因式分解是整式乘法正向与逆向的转换.从素养主线看,本节课聚焦学生的抽象能力(法则得出)、几何直观(法则验证)、推理能力(代数演算)、运算能力(代数式的计算)等核心素养的发展.

(三)分析学情,确定教学起点

著名教育心理学家奥苏伯尔认为:“影响学习的最重要因素是学生已经知道了什么,根据学生原有的知识状况进行教学.”^[5]一切教学行为都应该建立在学生已有认知基础之上,以学生已有的认知作为新知的重要生长点.学习整式乘法之前,学生已经学习了有理数和幂的运算,知道有理数的研究路径(背景—概念—性质—运算—应用)、幂的运算学习方法(计算、观察、猜想、归纳、验证),这些都为学生学习整式乘法奠定了基础.将幂的运算的研究思路(学结构)迁移到整式乘法的教学中来(用结构),学生经历一以贯之的学习过程,真正从学会走向了会学,充分体现了章起始课的系统性、结构性、整体性.

(四)创设情境,提出研究问题

党的二十大报告提出,全面提高人才自主培养质量,着力造就拔尖创新人才.创新是引领发展的第一动力.《课标2022》将创新意识作为发展学生的核心素养之一.其课程理念认为,教学活动应引导学生在真实情境中发现和提出问题,并在教学建议中指出,要强化情境设计与问题提出,注重发挥情境设计与问题提出对学生主动参与教学活动的促进作用,使学生在活动中逐步发展核心素养.数学的创新往往始于问题,发现和提出问题是创新的基础.与“问题解决”相比,“问题提出”更为重要.数学问题的产生离不开一定的数学情境.问题情境的创设,其教学意义在于激发学生的问题意识,引发学生的数学活动与思考.这就是情境的意义所在,也是时代的教育价值取向.

教材在“整式乘法与因式分解”的章头呈现了通过将若干几何图形进行拼图、推演并得到整式乘法法则,说明整式乘法与因式分解之间的联系与区别的图文情境.同时,设计了数学实验“用若干块长方形和正方形硬纸片,拼成的图形面积分别是多少……”.起始课提供了两个方面的素材:一是培养几何直观的计算问题“几台型号相同的电视机叠放在一起组成电视墙的面积”,二是培养代数推演能力的两个代数式的乘法问题.代数式的乘法推演可以借助于有理数

乘法的运算律,在运算律的比较与适用条件的分析过程中进行认知同化.借助于几何直观,可以通过拼图简明地得到代数运算律的结论并验证其正确性.代数式中的字母具有一般性,而拼图中的字母由于需要考虑实际意义,只能取正而具有局限性.至于教材为何把拼图放在前面,笔者认为这是考虑到拼图在本章中的直观作用,从另一个角度看,与抽象相比,具象(直观)更容易被学生理解.基于以上分析,笔者认为,先代数演算再拼图验证的教学设计更恰当.

·教学片段1 创设情境,提出问题

问题1 我们学习了“数”的哪些运算?

生1:加、减、乘、除、乘方、混合运算,还研究了数的运算律.

师:数主要研究运算及运算律.后来,我们学会用字母表示数,从对“数”的研究转向“式”——代数式的研究.代数式有许多种类型,包含单项式与多项式的整式是其中最特殊、最简单的一类.

问题2 关于整式,我们学习了哪些知识?

生2:单项式及其次数的概念、多项式的概念、整式的概念等.

活动1 请写出一个同时含有字母 a, b 的单项式与多项式.

学生举例: $2a^2b^3, -4a^3b^5, 2a^2b^3 - 4a^3b^5$ 等.

问题3 与数的学习过程一样,学习了整式的相关概念后就要学习整式的运算.你认为我们可以研究整式的哪些运算?

生3:整式的加、减、乘、除、乘方.

追问1:我们已经学习了整式的哪些运算?

生3:整式的加减.

追问2:整式的加减运算实质是什么?用了哪些运算律?

生3:合并同类项.用了加法的交换律和结合律,因为整式中的字母也代表数.

问题4 你认为接下来我们可以研究整式的什么运算?

生(齐答):整式的乘法和除法.

师:今天我们就开启新的运算学习——整式的乘法.

活动2 请根据刚才列出的整式,构造整式的乘法算式,并尝试归纳整式乘法的基本类型.

学生活动:单项式乘单项式,单项式乘多项式,多项式乘多项式.

师:上述三类整式的乘法中,单项式乘单项式是

最简单、最特殊的情形,也是整式乘法运算的奠基工程。(板书)

问题5 单项式乘单项式如何运算?

教材中“单项式乘单项式”的问题情境从代数与几何两个角度,在初步感知单项式乘以单项式如何运算的基础上,给出3个单项式乘单项式的计算“(1) $2a^2b \cdot 3ab^2$; (2) $4ab^2 \cdot 5b$; (3) $6x^3 \cdot (-2x^2y)$ ”,并说明理由.学生模仿问题情境的方法进行计算,发现(3)有负号而无法从拼图的角度思考,只能从代数演算的视角进行,充分体现了学习单项式乘单项式法则的必要性.

爱因斯坦说过,提出问题比解决问题更重要.在问题情境的设计中,教师无须设计好所有的问题思路,自己做“向导”,让学生按照预设的路线走,而应该把设计的“天机”有意识地泄露给学生,让学生能体验到提出问题的思路是怎么形成的,慢慢地他们自己也能成为“向导”^[6].这是一个长期的、循序渐进的过程.教师要有意识地经常做这样的问题设计与引导,鼓励学生提出问题,验证他们的猜想和结论.长此以往,学生才能养成会提问题、会思考问题的习惯,从而激发主动学习的自觉性,促进创新意识的发展.

(五)活动探究,感悟研究方法

数学教学应该是“以激励学习为特征,以学生活动为中心”的实践模式,而不是“传授知识”的权威模式.数学教学是数学活动的教学,数学教学过程是数学活动的过程^[7].在活动中教会学生研究问题的一般方法,让学生学会思考,是数学教学的应然追求.

· 教学片段2 经历过程,归纳法则

活动3 6张长为 a 、宽为 b 的长方形纸片,拼成一个大长方形,尽可能多地展示不同拼法.

学生活动:用纸片拼图得出单项式乘单项式相乘的结果 $6ab$.

思考:能否从运算的角度来解释这些结果的正确性?

生4: $3a \cdot 2b = 3 \times 2 \cdot a \cdot b$.

追问:理由是什么?

生4:利用乘法交换律,原式 $= (3 \times 2) \cdot (a \cdot b)$.再利用乘法结合律,得到 $6ab$.

师: $3a \cdot 2b = 6a \cdot b$ 属于单项式乘以单项式,计算过程中为什么可以利用乘法的交换律和结合律?

生4: a 和 b 是字母,可以表示任意的数,仍然属于数的乘法,因此有理数的运算律在单项式乘法中仍然适用.

师:同理,对于 $a \cdot 6b = 6ab$ 呢?(学生起来回答)

师:刚才大家列举的整式乘法该怎么算呢?如 $2a^2b^3 \cdot 4a^3b^5$ 怎么计算?请说明理由.

学生计算,并说明每一步理由.(利用乘法交换律、乘法结合律与同底数幂的运算性质来计算)

再计算2个学生的举例,说明每一步的理由: $2x^2 \cdot (6x^3y^5)$, $2m^2n^3 \cdot (-4m^3n^5)$.

生5:无论系数和字母怎么变,两个单项式相乘都是系数与系数相乘,同底数幂相乘.

师:上面的这些算式都是单项式乘单项式,回顾刚才的学习经验,单项式乘单项式该如何进行计算?(展示4个单项式乘单项式: $4a \cdot 2b = 8ab$, $2a^2b^3 \cdot 4a^3b^5$, $2x^2 \cdot (6x^3y^5)$, $2m^2n^3 \cdot (-4m^3n^5)$)

学生独立思考几分钟,再分组讨论归纳,交流.根据学生的回答,教师择机板书.

单项式的乘法法则归纳:(略)

问题6 单项式乘单项式的结果是什么?

生6:还是单项式,单项式乘单项式本质是系数相乘和幂的运算.

归纳单项式乘单项式法则是一个“特殊到一般”的过程,至少应该选取3个异质特例.本节课研究的是单项式乘单项式,在学生完成计算、归纳法则之前,引导学生明晰已有数学现实:其一,单项式由系数和字母组成,后续逐步归纳法则中系数、字母需要分别考虑;其二,同底数幂的乘法,为后续字母乘法运算作铺垫,它们共同为法则的归纳奠定基础.

基于“教学生如何思考,关注过程育人”的视角,笔者认为,在教学生熟悉乘法法则的基础上还可以启发学生逆向思考系数的乘法与除法、同底数幂的乘法与除法,为学习单项式除以单项式奠基.

(六)搭建结构,明晰一般观念

单元起始课教学要充分发挥好章首功能,对本单元的知识脉络进行梳理、加工,搭建知识发展的框架结构.在知识生成与问题解决的过程中采取抽象与直观相结合的呈现形式.通过板书(下页图3)呈现系统的知识结构图、问题解决流程图、概念发展图或方法示意图.繁简适宜的呈现形式可以帮助学生直观地掌握研究方法、感悟研究套路,不仅有助于学生完善自己的认知结构,丰富思想方法,而且对学生良好思维习惯的培养、认知方式的形成和批判性思维的发展也是非常有益的.

整式乘法与因式分解单元的学习可以类比“数”的研究思路和方法.“整式”中单项式乘单项式的研

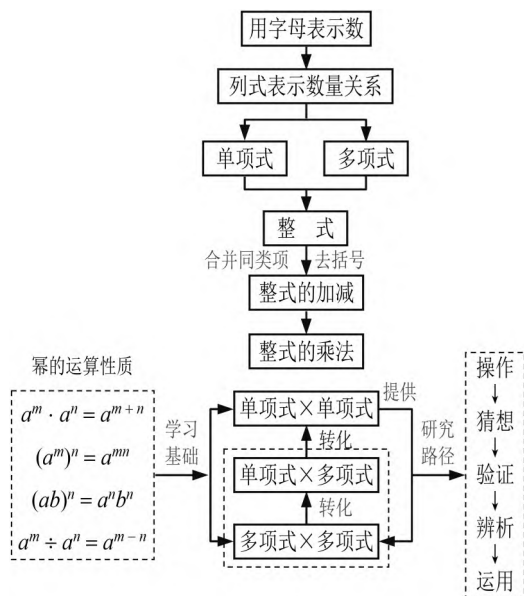


图 3

究,为后续单项式乘多项式、多项式乘多项式、乘法公式等内容提供了方法和路径。按照“背景—定义—性质—应用”的研究基本路径,从直观到抽象展开思考活动,让学生在潜移默化中形成问题解决策略与数学的思考方式。

· 教学片段 3 反思过程,明晰观念

问题 7 回顾法则的探究,我们经历了怎样的过程?

生 7:从特殊到一般。

师:从特殊到一般的数学归纳方法在探究代数运算规律的时候经常用到。

问题 8 如果是三个单项式连乘,该怎么算? 计算: $(2x)^3 \cdot (-3xy^2) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^2y^4\right)$ 。

追问:4 个、5 个单项式连乘呢?

师生活动:在师生的互动交流中,教师引导学生将法则进一步拓展到多个单项式相乘。

问题 9 你还能提出什么问题?

追问:你能设想一下单项式乘多项式的步骤吗?

师生活动:利用分配律转化为单项式的乘积之和,再利用乘法交换律、结合律进行单项式乘单项式运算。

归纳出法则后,引导学生思考与检验,三个及以上单项式相乘时该法则是否依然适用。在得到肯定的结论以后,进一步启发学生思考:如果单项式复杂一点,比如融入“幂的乘方或积的乘方”,该如何计算? 学生探究后发现:“同底数幂相乘、幂的乘法、积的乘方”

的结果都是单项式,可以将单项式乘法的未知问题转化成“数的乘法”“同底数幂的乘法”的已知问题。

数学教育的根本任务是育人,在教学学生学会思考、发展学生认知力的同时培养他们善于思考、敢于创新的优良品格^[8]。课堂是数学育人的主要阵地。在一般观念的引领下,整体把握教学内容,进行单元整体建构,促进知识结构化,指明数学研究套路,教会学生研究方法,这些既是课程标准之唤,也是现实教学之需,同时也回应了聚焦核心素养培育的时代主题。期待这种教学理念能成为课堂教学的一种自然样态。

参考文献:

- [1]邢成云,王尚志. 初中数学“章起始课”的探索与思考[J]. 课程·教材·教法,2021,41(3):76-82.
- [2]中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京:北京师范大学出版社,2022:87.
- [3]浦叙德,陈晓靓. 初中数学教材的三维单元视角及教学解读路径——以苏科版教材为例[J]. 中学数学教学参考,2022(9 中):69-71.
- [4]浦叙德. 课时教学要在“单元理念”引领下实施——以“线段、射线和直线”(第 1 课时)为例[J]. 中学数学教学参考,2023(7 中):73-75.
- [5]何睦. 高中数学章节起始课的理论探析与教学思考[J]. 数学通讯,2019(11 下):1-4,7.
- [6]叶琳. 提出问题,启发引导,深度对话——“一道教材例题的激活与拓展”教学反思[J]. 中学数学教学参考,2018(9 上):22-24,29.
- [7]涂荣豹. 数学教学认识论[M]. 南京:南京师范大学出版社,2003:17.
- [8]王磊,陈建明,杨博谛,等. 回顾与启示:近四十年中国基础教育数学单元教学研究[J]. 数学教育学报,2023,32(4):21-27.

【作者简介】叶琳,江苏省无锡市教育科学研究院(214101);浦叙德,江苏省无锡市新吴区教师发展中心(214027)。

【原文出处】《中学数学月刊》(苏州),2024. 7. 37~41

【基金项目】本文系江苏省中小学教学研究 2023 年度第 15 期重点课题“生成哲学视域下的初中数学教学体系建构研究”(2023JY15-ZA35)及“新课标下初中数学教材整体化解读的实践研究”(2023JY15-ZA54)的阶段性研究成果。