

用数学奏响音乐:跨学科视角下的等比数列概念教学

葛诗滢 丁福军

【摘要】文章基于跨学科视角,认识音乐与数学古代的渊源与当代的断裂,抓住音乐律制发展与等比数列知识的紧密联系,设计音乐融入等比数列概念的教学案例,为学生提供用数学的眼光看音乐的机会.在具体教学过程中,注重寻找音乐与数学的联结,发展跨学科思维,体会数学的实用性与和谐美,激发学生学习数学的热情.

【关键词】跨学科;等比数列;概念教学;音乐

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称《课标》)提出“强调数学与生活以及其他学科的联系”“不断引导学生感悟数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值”的课程理念^[1],要求从跨学科视角进行数学教学,挖掘数学价值.同时,在选修D类课程中首次设置的“音乐中的数学”为数学教学提供了新视角.音乐自古便与数学有着无法割舍的紧密联系,在发展的道路上更是相辅相成.然而,在倡导学科跨界、各科交融的今天,音乐与数学却被认为是两门风马牛不相及的学科,有着难以逾越的鸿沟.音乐背景的人对数学望而生畏,数学背景的人对音乐一窍不通,这种陌生的断裂与冰冷的隔阂需要更多的关切^[2].

目前,可以查阅到有关音乐融入数学教学的文献较少,真正落实到课堂中的更难以看到,断裂的文化态势或许会导致危险的文化倾向,从数学与音乐的交融点寻找数学教学的新方向,是时代赋予我们的深沉问题.因此,本文基于跨学科视角,站在音乐与数学的历史交汇点上,抓住音乐律制发展与等比数列知识的紧密联系,进行音乐融入等比数列概念的教学设计,以期优化等比数列概念教学提供启示.

一、音乐中的等比数列

音乐与数学有着古老的渊源,早在古希腊时期,毕达哥拉斯提出“万物皆数”的哲学概念,由此发现琴振动的音高与弦长之间的关系,以比例 $1:2$, $2:3$, $3:4$ 沟通数学与音乐,建立起音乐中的重要音程.毕达哥拉斯进一步将音乐和谐的数字比例推广至其他领域,建立起和谐宇宙观,认为整个宇宙都是一部“和谐的世界合唱”.这使得数与音乐成为当时

的流行词,数学家被称为音乐家,音乐家也成为研究“数—比例—和谐理论”的数学家,音乐在古希腊文明的入口被定义为一门数的学科^[3].同样,我国的传统教育“六艺”把“乐”与“数”并列其中.1978年出土的曾侯乙编钟显示出精湛的音乐水平与乐器制造工艺,这离不开对音数关系的深刻认识,春秋战国时期的《管子·地员篇》中也提到了音乐中的数学比例关系^[4].

音乐本身充满着数学,音乐的发展也促进了数学的应用.律制是以某特定音程为基础,用数学方法规定的一系列乐音高度的体系.在律制的发展中,数学与音乐紧密地联系在一起,比例的运用创生了中西方最早的律制“三分损益律”和“五度相生律”,而律制中的移调问题也引发了千年来的数学思考,直到应用等比数列知识建立起十二平均律才得以解决.十二平均律(也称“等程律”)由我国明代朱载堉所创立,朱载堉称它为“新法”“密率”.“新法”是指创立了不同于“三分损益法”的新律制算法;“密率”是指 2 的 12 次方根,即 $\sqrt[12]{2}$ ^[5].朱载堉通过大量的比较、研究和声学实验,发现只有在一个八度内取十二律的方法才是明智的;在批判性地总结前人的研究成果后,懂得只有运用等比数列的方法才能够达到“旋宫转调”.当时尚未有求解等比数列的方法,也无分数指数幂运算与开高次方的先例,朱载堉谋求解决音乐律制中的旋宫问题,其必然结果是发现十二平均律,而解决十二平均律带来的数学问题又使他攀上了另一座数学高峰^[6].

二、教学过程

(一)创设情境,引入新课

情境 钢琴被称为“乐器之王”.标准钢琴有88

个琴键,能够产生 88 个不同的音符,每个琴键对应的音名与频率如图 1 所示.

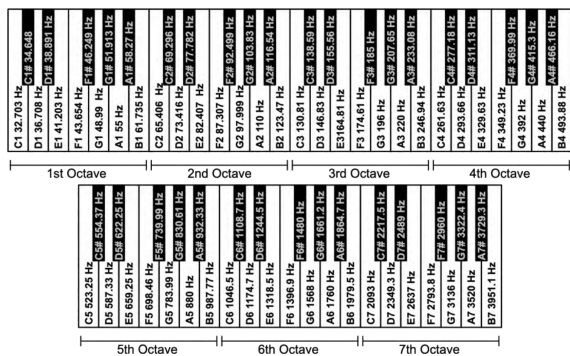


图 1 钢琴琴键及其音名与频率

问题 1 将 A3 到 A4 的琴键对应频率依次排列,可得数列:220, 233.08, 246.94, 261.63, 277.18, 293.66, 311.13, 329.63, 349.23, 369.99, 392, 415.3, 440.这个数列是等差数列吗?请尝试通过不同的运算寻找这些数之间的规律.

师生活动 学生通过计算发现上述数列不是等差数列,但后一项与前一项的比值始终都约等于 1.059.由此,教师点明本节课要学习的特殊数列——等比数列,并引导学生思考钢琴琴键的频率呈现这样的特点是巧合吗?比值 1.059 究竟蕴含着什么样的数学知识?

设计意图 通过钢琴这一学生熟悉的乐器创设情境,以琴键频率作为数列,寻找其规律,使学生初步感知数学与音乐的联系,点明新课内容并为后续等比数列在音乐律制中的应用做好铺垫,激发学生继续学习的兴趣.

(二) 类比归纳,形成概念

问题 2 类比等差数列的概念,给等比数列下一个精确定义,并思考如何用符号表示.

师生活动 学生类比等差数列概念给出等比数列的精确定义:一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的比值为同一个常数,称这个数列为等比数列.教师说明这个常数称为等比数列的公比,用符号 q 表示,可表示为 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$;教师引导学生思考当公比 q 为正、负数以及 1,0 时的特殊情况,发现 q 不能为 0.

问题 3 在情境 1 中,若已知 A3 的频率,如何通过计算得到 E4 的大致频率? B4 和 D5 呢?

师生活动 学生通过观察钢琴琴键的位置,发现 E4 为 A3 后第 7 个琴键,因此, E4 的大致频率为 $220 \times (1.059)^7$,同理可得 B4 和 D5 的大致频率.

问题 4 设钢琴第一个琴键频率为 a_1 ,后一个琴键频率为前一个的 q 倍,则第 n 个琴键频率是多少?

还能利用其他方法推导等比数列的通项公式吗?

师生活动 学生在问题 3 的基础上通过归纳法得到等比数列的通项公式 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.此外,教师引导学生从等比数列的定义出发,类比等差数列,利用累加法求通项的方法,用累乘法求等比数列的通项公式.

问题 5 如何直观地看到等比数列的变化情况?

师生活动 学生想到可以把数列表示为直角坐标系中的散点,教师出示图象,引导学生结合通项公式观察,发现其与指数函数紧密关联.

设计意图 通过类比和归纳,引导学生从情境中抽象出等比数列的定义并求解通项,渗透知识迁移,从特殊到一般的思想,数形结合的方法,感受等比数列的图象特点,以及与指数函数的关系,理解等比数列的本质.

(三) 音数交融,拓展延伸

师生活动 教师点明等比数列在我国音乐律制的发展历史中起到了划时代的作用,介绍律制是对八度音程内的音进行特定选择的过程,带领学生从律制发展感受等比数列的实用性.

问题 6 “三分损益律”是我国最早采用的律制,通过“三分损益法”计算振动体长度以确定各音.《管仲·地员篇》中记载其生律方法,以数值 81 作为基准弦长(即为宫音),“三分益”即将其三等分后增加其长的 $\frac{1}{3}$ (即原来的 $\frac{4}{3}$),“三分损”即减少其长的 $\frac{1}{3}$ (即原来的 $\frac{2}{3}$),自宫音起先益后损依次求得各音弦长,按音高排列为“徵羽宫商角”.《史记·律书》中先损后益依次计算,按音高排列为“宫商角徵羽”.试用“三分损益法”分别计算先益后损和先损后益得到的各音及弦长.

师生活动 学生独立计算并列列表 1 如下:

表 1 学生计算得到数据

先益后损	81	108	72	96	64
先损后益	81	54	72	48	64

教师说明弦长(或管长)与音高(或频率)成反比,学生按音高排列如表 2 所示:

表 2 按音高排列后数据

先益后损	108(徵)	96(羽)	81(宫)	72(商)	64(角)
先损后益	81(宫)	72(商)	64(角)	54(徵)	48(羽)

学生观察表格发现两种计算顺序所得“宫商角”三音对应弦长一致,而“徵羽”二音对应弦长为两倍关系.教师说明两种方法计算所得“徵羽”两音刚好距离八度音程,即二音的音高关系,频率成比例

1:2, 相隔八度的音听起来非常相似, 称为“八度等效”现象.

问题 7 “三分损益法”在我国律制中占有重要地位, 但带来的问题困扰了数学家和音乐家数千年. 随着音乐的发展, 五声调式不能满足音乐需求, 因此, 利用“三分损益法”又生两律, 构成七声调式, 按音高排列得到数列: $81, 72, 64, \frac{512}{9}, 54, 48, \frac{128}{3}$. 结合计算, 观察这一数列有什么特点? 存在什么问题?

师生活动 学生通过计算发现, 后一项与前一项的比值均为 $\frac{8}{9}$, 但 $\frac{512}{9}$ 和 54 除外, 因此不是等比数列. 教师说明, 这带来了音乐律制中的“旋宫转调”问题, 即移调问题. 移调是指改变起始音的音高后, 其余各音也随之改变相同音程, 即改变相同频率比.

问题 8 为解决“旋宫转调”问题, 《吕氏春秋·音律篇》中记载, 在七声调式基础上又生五律, 得到我国最早的十二律, 按音高顺序排列为“黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、中吕、蕤宾、林钟、夷则、南吕、无射、应钟、清黄钟”. 但“旋宫转调”问题并未解决, 与此同时出现了音乐律制中第二个问题——无法实现“黄钟还原”, 即十二次生律后生成的清黄钟并不是高八度的黄钟音. 若各音弦长按生律过程排列, 写出其通项公式, 从数列角度说明为何无法实现“黄钟还原”.

师生活动 若记第 n 个音对应弦长为 a_n , 则可抽象出如下数学问题:

已知数列 $\{a_n\}$, 首项 $a_1 = 81$, 递推公式为

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{3}a_{n-1}, & n \text{ 为偶数;} \\ \frac{4}{3}a_{n-1}, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (\text{其中 } n \geq 2),$$

判断是否存在正整数 n , 使得 $a_n = \frac{81}{2}$.

学生根据“三分损益法”的生律过程, 归纳求解或递推求解, 得到数列通项公式为

$$a_n = 81 \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}, & n \text{ 为偶数;} \\ 81 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

验证不存在正整数 n 使得 $a_n = \frac{81}{2}$, 因此, “三分损益法”必然导致“黄钟无法还原”. 教师介绍音乐史上曾用“三分损益法”继续生律得到“京房六十律”和“钱乐之三百六十律”, 虽然极大缩小了音差, 但依旧无法实现“黄钟还原”, 更因分律过细而丧失实用价值. 直到南北朝何承天转变“一味增加律数”的做法,

将黄钟与清黄钟的音差分为 13 项等差数列依次加于各律, 从十二律内部进行调整实现“黄钟还原”, 然而使得“旋宫转调”更为复杂.

问题 9 “黄钟不能还原”问题历经了千年, 直到明朝皇世子朱载堉创立“新法密率”(即今“十二平均律”)才得以解决, 同时“旋宫转调”问题也随之而解. 这一新法使得黄钟生律十二次能够回到高八度的倍黄钟, 并且移调自由. 若假设起始律黄钟的频率为 1, 结合本节课的知识猜测新法如何解决两大音律难题.

师生活动 学生由“黄钟还原”得出倍黄钟频率为 2, 移调自由即十二音律之间相邻音程相等, 相邻项比例相等, 也就是要解决“已知首项、末项和项数后, 求解这个等比数列”的问题. 结合等比数列知识抽象出数学问题: 若等比数列 $\{a_n\}$ 首项为 1, 末项为 2, 由 13 项构成, 求公比 q . 计算得 $q = \sqrt[12]{2} \approx 1.059$. 教师介绍朱载堉的“新法密率”正是用到了等比数列的思想, 公比为朱载堉称为“密率”的数值, 即音程. 这个等比数列的各项便是“十二平均律”各音的频率, 钢琴的琴键正是依据十二平均律制造的. 教师紧接着引导学生思考, 结合所学解决“黄钟不能还原”问题仅需短短几分钟, 历史上十二平均律为何花费千余年才建立. 教师介绍朱载堉所处的时代背景, 尚未建立音程概念, 也无等比数列精确定义, 提问“朱载堉又是如何想到利用等比数列建立新法的呢?”引导学生继续了解朱载堉建立“新法密率”的思路历程.

问题 10 设 3 项 a, G, b 成等比数列, 试用 a, b 表示 G .

师生活动 学生根据等比数列的概念, 得 $\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$, 化简得 $G^2 = ab$, 即 $G = \sqrt{ab}$, 教师点明 G 称为 a 与 b 的等比中项. 朱载堉创立新法的第一步便蕴涵了等比中项的思想, 从倍黄钟到黄钟, 弦长减少一半, 其间分布十二个音律, 朱载堉当时便意识到要想“旋宫转调”十二音律之间一定存在某种等量关系, 通过弹奏试验可发现等差关系不能“旋宫转调”, 由此判断可能存在等比关系^[7]. 记黄钟弦长为 2, 则倍黄钟弦长为 1, 蕤宾位于黄钟与倍黄钟正中, 三者成等比数列, 因此蕤宾 $= \sqrt{\text{黄钟} \times \text{倍黄钟}} = \sqrt{2}$. 第二步同理, 蕤宾和黄钟正中的南吕 $= \sqrt{\text{蕤宾} \times \text{倍黄钟}} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

问题 11 朱载堉判断黄钟、蕤宾与倍黄钟三者存在等比关系, 若从项数来看, 首项为倍黄钟, 末项黄钟为第 13 项, 正中间的蕤宾为第 7 项, 由此可得 $a_7^2 = a_1 \cdot a_{13}$, 同理得到 $a_{10}^2 = a_7 \cdot a_{13}$. 结合等比数列知识说明两个等式的正确性, 观察下标你能得出什么

猜想,能否进一步推广并证明.

师生活动 学生结合等比数列的通项,得到 $a_7^2 = (a_1 q^6)^2 = a_1^2 q^{12}$, $a_1 a_{13} = a_1 (a_1 q^{12}) = a_1^2 q^{12}$, 验证 $a_7^2 = a_1 a_{13}$ 成立. 同理可得 $a_{10}^2 = a_7 a_{13}$. 教师引导学生理解等比数列中相隔等距离的项组成的数列仍是等比数列,随后通过观察两个等式的下标归纳得到猜想:若 $2s = m + n$, 则 $a_s^2 = a_m a_n$. 进一步推广为:若 $s + t = m + n$, 则 $a_s a_t = a_m a_n$.

设计意图 让学生通过计算了解“三分损益律”的生律过程,认识八度音程以及移调概念,融音乐知识于数学教学,经历音乐律制的发展过程,以数学眼光来看移调问题,用数列解释“黄钟不能还原”. 利用等比数列以及音程概念尝试解决音乐律制发展中的两大难题,理解朱载堉创立新法的等比思想,在解决问题中巩固知识、深化认知,体会数学的实用性,增强用数学解决问题的信心,认识音乐与数学的紧密联系与相辅相成.

(四) 梳理小结,情感升华

师生活动 教师引导学生回顾等比数列的定义、通项、图象以及等比中项等性质,认识等比数列在音乐律制发展中的巨大作用,感悟音乐与数学的密切联系.

设计意图 回顾梳理本节课所学,巩固知识,形成体系,感受音数关联,提高音乐与数学素养.

三、教学反思

(一) 寻找音乐与数学的联结,发展学生跨学科思维

数学是理性的思维,音乐是感性的艺术,二者就其“抽象本质”达成一致. 音乐基于数学理论不断发展,数学在音乐中的运用也促进了自身的进步.《课标》指出,数学教育要提升学生的数学素养,引导学生会用数学的眼光观察现实世界,会用数学的思维思考现实世界,会用数学的语言表达现实世界. 因此,本节课通过寻找音乐与数学的联结,将音乐融入数学教学,这不仅是对音乐的审美体验,更让学生认识到音乐中富含数学因子,二者紧密关联,相辅相成,为学生提供用数学眼光看音乐的机会,借助数学视角更加理性地认识音乐规律,感受音乐之美. 同时,课程与教学中强调跨学科思维,即不囿于学科边界,重视学科内部、外部的知识交叉、融合,通过跨学科整合知识以解决问题的思维方式^[8]. 本节课中,用等比数列知识解决音乐律制发展中“黄钟不能还原”与“旋宫转调”问题,感受音乐中音程与数学中比例的关系,认识移调问题的本质是音程不等,进而为等比数列思想的运用提供了启示,促进学生跨学科思维的发展.

(二) 彰显数学的实用与美感,培育学生积极的数学情感

数学并不是冰冷的、位于神坛上的学科,相反,数学以其基础性和实用性在各门学科中都有渗透. 本节课带领学生用数列思考“黄钟不能还原”问题,经历朱载堉利用等比数列建立“新法密率”的过程,体会数学知识与思想对促进音乐律制发展的重大意义,让学生感受数学的实用价值,以及在对和谐美的追求上,音乐与数学的一致性. 此外,在数学学习中,学生经常表现出负面的情绪和动机,认为数学枯燥乏味,毫无美感可言,甚至是无用的. 而音乐作为一门艺术,则被认为是涤荡心灵、舒缓情绪,并且富含美的学科. 因此,将音乐融入数学教学,增添了数学学习的趣味. 本文从钢琴琴键的频率规律出发,激发学生探索的热情,用数学解决音乐史上的难题,让学生感受到数学的强大力量与价值所在,进而培养学生积极的数学情感.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 马斌. 论钢琴与数学的渊源及对当代的启迪[J]. 黄河之声,2014(17):91.
- [3] 徐照明. 论古希腊音乐的科学精神:以毕达哥拉斯和亚里士多德的音乐思想为中心[J]. 南京艺术学院学报(音乐与表演版),2010(4):17-22,32.
- [4] 马钦忠. 古希腊与先秦如何看待音乐与数的关系[J]. 黄钟(武汉音乐学院学报),1993(1/2):107-113.
- [5] 戴念祖. 从传统音乐学和数学角度看朱载堉创立等程律的思维[J]. 中国音乐学,2014(4):20-25.
- [6] 戴念祖. 朱载堉的生平及其数学成就:纪念朱载堉诞生480周年[J]. 自然科学史研究,2016,35(4):417-426.
- [7] 徐飞. 朱载堉十二平均律算法考[J]. 科学技术与辩证法,1994(5):35-39.
- [8] 黄翔,童莉,史宁中. 谈数学课程与教学中的跨学科思维[J]. 课程·教材·教法,2021,41(7):106-111.

【作者简介】 葛诗滢(2000-),浙江师范大学教育学院,硕士研究生,研究方向:数学教育(浙江金华 321004);丁福军,浙江师范大学心理学院(浙江金华 321004).

【原文出处】《中学教研(数学)》(金华),2024. 9. 11~15

【基金项目】 教育部人文社会科学研究青年基金项目(23YJCZH035).