【符号逻辑】

概率命题逻辑及其动态化

潘易欣　郭美云

【摘　要】概率逻辑是量化研究和不确定推理中的重要工具，动态化与条件化是刻画概率更新的两个重要方式。基于一种简化的概率模型，本文提出一个概率命题逻辑，研究其互模拟和框架可定义性等相关性质。在概率命题逻辑的基础上加入公开宣告算子实现其动态化，并证明扩充后的动态概率命题逻辑可以归约到原逻辑上。最后，在动态概率命题逻辑中引入条件概率公式，讨论公开宣告算子和条件概率算子在概率更新方面的区别。

【关 键 词】概率命题逻辑；条件概率；公开宣告；归约公理；概率更新

【作者简介】潘易欣，西南大学逻辑与智能研究中心，Yixin0_0@126.com；郭美云，西南大学逻辑与智能研究中心，西南大学中希文明互鉴中心，guomy007@swu.edu.cn。

【原文出处】《逻辑学研究》(广州)，2025.1.51～75

【基金项目】国家社科基金重点项目“概率更新的动态认知逻辑研究”(21AZX013)；重庆市博士研究生科研创新项目“基于邻域语义学的概率认知逻辑研究”(CYB22083)；西南大学创新研究2035先导计划哲学百年中国化研究团队项目(SWUPilotPlan018)。

1　引言

经典命题逻辑从质的角度研究命题的真与假，而概率逻辑的发展为经典命题逻辑提供了一种定量分析的方法，以探讨主体对命题的信念程度。在不确定推理的相关研究中，概率逻辑也受到了广泛的关注与应用。

在概率逻辑的发展中，前苏联数学家柯尔莫格洛夫(Kolmogorov)[14]以集合论的方法提出了一个类似公理化系统的概率体系。然而，这个体系很难表达一些复杂的概率公式，比如概率的比较公式 $P(\varphi)\leqslant P(\psi)$ 和概率公式的嵌套 $P(P(\psi)=1)>0.2$ 等。为此，费金(Fagin)、哈尔彭(Halpern)和莫吉多(Megiddo)[9]完善了柯尔莫哥洛夫提出的概率体系，在可能世界语义中将概率视为一种模态算子，利用若干线性不等式公理构造了一个表达力更为丰富的概率命题逻辑(Probabilistic Propositional Logic，PPL)。随后，概率命题逻辑在这一研究进路下，逐渐发展并形成了两类刻画概率的逻辑模型——概率空间模型(Probability space model)和离散概率模型(Discrete probability model)。[7]概率空间模型取可能世界集的某个子集构造一个概率空间，概率函数的论域是概率空间中的 σ 代数；离散概率模型把世界集限制在有穷的范围内，把概率函数定义在整个世界集上。离散概率模型可以看作是概率空间模型的一个特例，其中的 σ 代数是世界集的幂集。离散概率模型的优势在于其简洁性，但作为概率函数，特别是主观概率函数，主体应该为可能世界集的子集赋予概率而非为某个具体的可能世界赋予概率。基于此，我们尝试对离散概率模型进行优化，提出一个更符合直观的PPL模型，并讨论其在模型论方面的相关性质。

自上世纪九十年代以来，概率命题逻辑逐渐被应用在认知逻辑的研究中。费金与哈尔彭[8]在经典认知逻辑中引入概率算子，构造了第一个概率认知逻辑(Probabilistic epistemic logic，PEL)。包括库伊(Kooi)[15]和范丙申(van Benthem)[2]等人在内的逻

辑学家们在费金等人工作的基础上加入公开宣告算子,逐渐形成了动态概率认知逻辑 PDEL 的研究进路。

在带有公开宣告的概率认知逻辑中,更新模型中概率函数的定义与贝叶斯更新有很大的相似之处,而条件概率公式的真假也是依赖于贝叶斯更新。条件概率公式 $CP(\varphi|\psi)=\beta$ 表示ψ为真时 φ 为真的概率是 β;宣告公式 $[\psi]P(\varphi)=\beta$ 表示宣告ψ后 φ 为真的概率是 β。库伊[15]和范丙申[2]讨论了二者之间的关系。库伊[15],第390-391页用类似摩尔语句的 $P(p)>0\wedge\neg p$ 说明这两个公式在 PDEL 中不是等价的,即,

$$CP(\varphi|\psi)=\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)=\beta$$

不是一个有效式。证明的关键是令上述公式中的 φ 和ψ都为 $P(p)>0\wedge\neg p$,可得 $CP(\varphi|\psi)=1$ 和 $[\psi]P(\varphi)=0$。那么,一个自然的追问是:在什么样的情况下,上述等价公式是有效的。

库伊[15]和范丙申[2]提出过一个猜想,可以通过如下公式将条件概率与公开宣告联系起来:

$$CP([\psi]\varphi|\psi)=\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)=\beta$$

这个公式的有效性问题以及上述两个追问需要在一个包含一元概率算子、二元条件概率算子和公开宣告算子的逻辑中讨论。

本文的主要工作有两个方面。第一,通过对离散概率模型的优化,我们提出了一个更符合直观的 PPL 模型,证明费金等人[9]提出的带有线性不等式的公理系统相对于 PPL 模型是弱完全的,并从模型论的角度讨论了其在互模拟和框架可定义性方面的相关性质;第二,我们提出了一个带有公开宣告算子的动态概率命题逻辑,并通过归约的方法证明了其弱完全性,此外,我们还进一步讨论了概率公式条件化与动态化之间的关系。

本文后续内容安排如下:第 2 节介绍简化的概率命题逻辑 PPL 及其互模拟和框架可定义性等问题。第 3 节给出在 PPL 的基础上加入公开宣告算子的动态概率命题逻辑 PPL!,通过将 PPL! 归约到 PPL 证明其完全性。第 4 节讨论条件概率公式和包含公开宣告算子的概率公式之间的关系。第 5 节总结本文的主要工作并提出一些有待研究的问题。

2 概率命题逻辑

2.1 概率模型

德米(Demey)和萨克(Sack)[5]通过对相关文献的研究,将常用的概率模型总结为两类:概率空间模型和离散概率模型。在概率逻辑的研究进路中,费金等人[8,9]采用了概率空间模型,库伊[15]、范丙申等人[3]则使用了离散概率模型。两类模型的具体定义如下。

定义 2.1(概率空间模型). 概率命题逻辑 PPL 的概率空间模型为$\mathcal{M}=\langle W,\mathbb{P},V\rangle$:

· W 为非空可能世界集;

· $\mathbb{P}_w=\langle S_w,\mathcal{A}_w,\xi_w\rangle$ 是 $w\in W$ 上的概率空间,其中

– $S_w\subseteq W$ 是 W 上的一个样本空间;

– $\mathcal{A}_w$是基于 S_w的 σ 代数;

– $\xi_w:\mathcal{A}_w\to[0,1]$是主体在 w 上的概率函数,满足 $\xi_w(S_w)=1$ 且对于任意两个交为空的集合 $X,Y\in\mathcal{A}_w$都有 $\xi(X\cup Y)=\xi_w(X)+\xi_w(Y)$;

· $V:Prop\to\wp(W)$,其中,$Prop$ 是原子命题集。

定义 2.2(离散概率模型). 概率命题逻辑 PPL 的离散概率模型为 $M=\langle W,\mu,V\rangle$:

· W 为非空有穷可能世界集;

· $\mu:W\to(W\to[0,1])$是一个概率函数,满足:对于任意 $w\in W$, $\sum_{u\in W}\mu_w(u)=1$;

· $Y:Prop\to\wp(W)$。

概率空间模型取可能世界集的子集构造一个概率空间,概率函数则定义在概率空间中的 σ 代数上。这种处理方式的优势在于可以避免概率函数的可测问题。概率函数的可测性指的是,概率模型中的概率函数是否可以为所有的公式赋予概率。概率空间模型的劣势在于其模型构造过于复杂,在语义定义中还需要引入内测度的概念。

相比之下,离散概率模型的结构更为简洁,即主体站在某个世界上为世界赋予概率,在语义定义中不需要用到内测度的概念。然而,概率命题逻辑中讨论的概率一般是主观概率,出于直观,主体往往只会对某个事件赋予概率,事件的外延就是可能世界

集的子集。因此,我们更倾向主体会为世界集赋予概率,而非为可能世界赋予概率。为此,我们对离散概率模型进行优化。

定义 2.3(PPL 模型). 给定原子命题集 $Prop$,概率命题逻辑的 PPL 模型为$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$:

· W 为有穷且非空的可能世界集;

· $\mu:W\to(\wp(W)\to[0,1])$是一个概率函数,且满足:

– 对于任意 $w\in W$,$\mu_w(W)=1$;

– 对于任意 $w\in W$ 和任意的 $X,Y\in\wp(W)$,如果 $X\cap Y=\varnothing$,那么$\mu_w(X\cup Y)=\mu_w(X)+\mu_w(Y)$。

· $V:Prop\to\wp(W)$。

概率函数μ需要满足的两个性质我们分别称之为正规性和可加性。特别地,我们将 $F=\langle W,\mu\rangle$称为 PPL 框架。

从概率空间模型的角度看,可能世界集的幂集是一个 σ 代数,PPL 中的概率函数定义在可能世界集的幂集上。因此,PPL 模型可以看作是概率空间模型的一个特例。从离散概率模型的角度看,PPL 模型与离散概率模型可以相互转换。在离散概率模型中,如果 X 是 W 的一个子集,那么我们用$\mu_w(X)$来表示$\sum_{\mu\in X}\mu_w(u)$;在 PPL 模型中,对于每一个形如$\{u\}$的单元集 X,可以将$\mu_w(\{u\})$简写为$\mu_w(u)$。

另外,在 PPL 模型中,将世界集限制在有穷的范围内不会在后续讨论中导致矛盾。在模态逻辑中,模型中的可能世界集一般是允许为无穷的。其中一个重要原因就是为了证明模态逻辑的强完全性。在强完全性的证明过程中,极大一致集的个数是无穷的,这就要求典范模型中的世界集是无穷的,而完全性的证明又要求典范模型必须是正规模态逻辑的模型,因此正规模态逻辑的模型必须可以是无穷的。但是,在后续内容中,我们将证明概率命题逻辑只具有弱完全性,典范模型中的世界集是有穷的。因此,这里将世界集限制在有穷的范围内既可以避免概率函数的可测问题,又不会影响后面完全性的证明。

PPL 模型中的概率函数除了正规性和可加性之外,还满足如下性质,分别被称为单调性和可分性。

命题 2.1. 给定一个 PPL 模型$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$,$w\in W$和任意的 $X,Y\subseteq\wp(W)$,我们有:

(1)单调性:如果 $X\subseteq Y\subseteq W$,那么 $\mu_w(X)\leqslant\mu_w(Y)$;

(2)可分性:$\mu_w(X)+\mu_w(Y)=\mu_w(X\cup Y)+\mu_w(X\cap Y)$。

证明.(1)假设 $X\subseteq Y\subseteq W$。可知存在一个 $X'\subseteq W$ 使得 $X\cup X'=Y$ 且 $X\cap X'=\varnothing$。由于μ具有可加性,可得$\mu_w(Y)=\mu_w(X)+\mu_w(X')$。又由于$\mu_w(X')\geqslant 0$,因此$\mu_w(X)\leqslant\mu_w(Y)$。

(2)令 $A=X\cap Y$,$X'=X\setminus A$ 且 $Y'=Y\setminus A$,显然 $A\subseteq W$。根据概率函数的可加性,$\mu_w(X)+\mu_w(Y)=\mu_w(X')+\mu_w(A)+\mu_w(Y')+\mu_w(A)$。因为 $X'\cap Y'=\varnothing$,因此,$\mu_w(X)+\mu_w(Y)=\mu_w(X'\cup Y')+\mu_w(A)+\mu_w(A)$。又因为$(X'\cup Y')\cap A=(X'\cap A)\cup(Y'\cap A)=\varnothing$,所以$\mu_w(X)+\mu_w(Y)=\mu_w((X'\cup Y')\cup A)+\mu_w(A)$。因此,$\mu_w(X)+\mu_w(Y)=\mu_w(X\cup Y)+\mu_w(X\cap Y)$。

□

2.2 语言和语义

定义 2.4(PPL 语言$\mathcal{L}_{PPL}$). 给定原子命题集 $Prop$,概率命题逻辑的语言$\mathcal{L}_{PPL}$定义如下:

$$\varphi::=p\mid\bot\mid\neg\varphi\mid\varphi\wedge\varphi\mid\alpha_1P(\varphi_1)+\cdots+\alpha_nP(\varphi_n)\geqslant\beta$$

其中,$p\in Prop$,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\in\mathbb{Q}$为有理数。概率公式 $\alpha_1P(\varphi_1)+\cdots+\alpha_nP(\varphi_n)\geqslant\beta$ 被称为线性不等式或概率公式,其中每一个 $\alpha P(\varphi)$被称为概率的项。其他的数学符号可以定义如下:

· $\alpha P(\varphi)\leqslant\beta:=-\alpha P(\varphi)\geqslant-\beta$

· $\alpha P(\varphi)>\beta:=\neg\,\alpha P(\varphi)\leqslant\beta$

· $\alpha P(\varphi)<\beta:=\neg\,\alpha P(\varphi)\geqslant\beta$

· $\alpha P(\varphi)\geqslant\alpha'P(\varphi'):=\alpha P(\varphi)-\alpha'P(\varphi')\geqslant 0$

· $\alpha P(\varphi)=\beta:=\alpha P(\varphi)\geqslant\beta\wedge\alpha P(\varphi)\leqslant\beta$

其他的逻辑符号如$\to$,T,$\vee$等的定义与常规定义一致。此外,对于不含概率公式的 PPL 语言,我们称为命题逻辑语言$\mathcal{L}_{PPL}$。

$\mathcal{L}_{PPL}$可以表达类似 $P(P(\varphi)\geqslant\beta)\leqslant\alpha$ 的高阶概率公式。但是有关高阶概率公式的规律和性质,目前还缺少进一步的讨论。在高阶概率的相关理论中较为有名的是米勒规则(Miller´s principle)[16]和范

弗拉森(van Fraassen)[10]基于条件概率提出的自省原则(Reflextion principle),分别可以表示为:

$$P(\varphi)\geqslant cP(P(\varphi)\geqslant c)$$

$$CP(\varphi \mid P(\varphi)=c)=c$$

其中 c 是一个有理数。哈尔彭[12]后来指出,自省原则只是米勒规则的一个特例。

定义 2.5(PPL 语义). 任给一个 PPL 模型 $\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$,一个可能世界 $w\in W$ 和一个公式 $\varphi\in\mathcal{L}_{PPL}$。点模型 $\mathcal{M},w$ 满足 φ(或 φ 在点模型 $\mathcal{M},w$ 上为真,记作 $\mathcal{M},w\models\varphi$)归纳定义如下:

$$\mathcal{M},w\models p \quad \text{iff} \quad w\in V(p)$$

$$\mathcal{M},w\models\bot \quad \text{iff} \quad \text{never}$$

$$\mathcal{M},w\models\neg\varphi \quad \text{iff} \quad \mathcal{M},w\not\models\varphi$$

$$\mathcal{M},w\models\varphi\wedge\psi \quad \text{iff} \quad \mathcal{M},w\models\varphi \text{ 且 } \mathcal{M},w\models\psi$$

$$\mathcal{M},w\models\alpha_1P(\varphi_1)+\cdots+\alpha_nP(\varphi_n)\geqslant\beta \quad \text{iff} \quad \alpha_1\mu(\llbracket\varphi_1\rrbracket^M)+\cdots+\alpha_n\mu(\llbracket\varphi_1\rrbracket^M)\geqslant\beta$$

其中,$\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}}=\{w\in W\mid\mathcal{M},w\models\varphi\}$,在后续讨论中如果模型$\mathcal{M}$是显然的或是固定的,我们将$\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}}$简写为$[\varphi]$。特别地,如果 Γ 是一个$\mathcal{L}_{PPL}$公式集,我们将$\mathcal{M},w\models\Gamma$ 定义为,对于所有 $\varphi\in\Gamma$ 都有$\mathcal{M},w\models\varphi$。

此外,我们称公式 φ 在模型$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$上为真(记作$\mathcal{M}\models\varphi$),当且仅当,对于任意 $w\in W$,都有$\mathcal{M},w\models\varphi$;称 φ 在框架$\mathcal{F}=\langle W,\mu\rangle$上有效(记作$\mathcal{F}\models\varphi$),当且仅当,对于任意基于$\mathcal{F}$生成的模型$\mathcal{M}$,都有$\mathcal{M}\models\varphi$;称 φ 是有效的(记作$\models\varphi$),当且仅当,对于任意 PPL 框架$\mathcal{F}$,都有$\mathcal{F}\models\varphi$。

2.3 证明系统 PPL 及其完全性

费金等人[9]在柯尔莫哥洛夫公理系统[14]中加入线性不等式公理组成了第一个概率命题逻辑的公理系统,我们称之为 PPL。

定义 2.6(公理系统 PPL). 公理系统 **PPL** 见表 1。

概率公理 P_1,P_2和 P_3也被称为柯尔莫哥洛夫公理。在线性不等式公理中,零项公理表示在线性不等式中,加法符号“+”可以连接任意一个数值为 0 的项;排列公理中,$\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jn}$是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的重新排列,表示加法具有交换律;加项公理表示了乘法的结合律;乘法公理表示不等式两边在同时乘以一个大于 0 的数后保持不等号方向不变;二分公理表示概率的项与数之间是可比较的;传递公理表示不等式中的不等号具有传递性。后文中,我们用 INEQ 表示所有线性不等式公理。

定理 2.1(PPL 的可靠性与完全性). 概率命题逻辑的公理系统 **PPL** 相对于 PPL 框架类是可靠且弱完全的。

证明. 可靠性根据语义可以直接证得。费金等人[9]中已经证明了其相对于概率空间模型的弱完全性,这里我们利用闭包(closure)的方法证明其相对于 PPL 模型的弱完全性。

表 1　　　公理系统 PPL

系统 PPL	
Axioms	
TAUT	所有命题逻辑重言式
P_1	$P(\varphi)\geqslant 0$
P_2	$P(T)=1$
P_3	$P(\varphi\wedge\psi)+P(\varphi\wedge\neg\psi)=P(\varphi)$
零项公理	$\sum_{k=1}^{n}\alpha_kP(\varphi_k)\geqslant\beta\leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\alpha_kP(\varphi_k)+0P(\varphi_{n+1})\geqslant\beta$
排列公理	$\sum_{k=1}^{n}\alpha_kP(\varphi_k)\geqslant\beta\rightarrow\sum_{k=1}^{n}\alpha_{j_k}P(\varphi_{j_k})\geqslant\beta$
加项公理	$\sum_{k=1}^{n}\alpha_kP(\varphi_k)\geqslant\beta\wedge\sum_{k=1}^{n}\alpha'_kP(\varphi_k)\geqslant\beta'\rightarrow\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k+\alpha'_k)P(\varphi_k)\geqslant\beta+\beta'$
乘法公理	$\sum_{k=1}^{n}\alpha_kP(\varphi_k)\geqslant\beta\leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}d\alpha_kP(\varphi_k)\geqslant d\beta(d>0)$
二分公理	$\sum_{k=1}^{n}\alpha_kP(\varphi_k)\geqslant\beta\vee\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(\varphi_k)\leqslant\beta$
传递公理	$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(\varphi_k)\geqslant\beta\rightarrow\sum_{k=1}^{n}\alpha_kP(\varphi_k)>\beta'(\beta>\beta')$
Rules	
MP	$\dfrac{\varphi,\varphi\rightarrow\psi}{\psi}$　　PRE　$\dfrac{\varphi\leftrightarrow\psi}{P(\varphi)=P(\psi)}$

首先,系统 **PPL** 不具有紧致性。考虑如下公式集

$$\Gamma=\{P(\varphi)<1\}\cup\{P(\varphi)\geqslant r\mid r<1\}$$

该公式集每一个有穷子集都可满足,但本身不可满足。因此,我们只能证明其弱完全性,即证明如果$\models\varphi$,那么$\vdash\varphi$。按照弱完全性证明的常规思路我们为一致的公式 φ 找一个满足它的模型,即基于 φ 的子

公式闭包和否定闭包 Φ 生成的典范模型 $\mathcal{M}^c=\langle W^c,\mu^c,V^c\rangle$。其中,$W^c$ 是基于 Φ 生成的极大一致集的集合,μ^c 是从 $W^c\times\wp(W^c)$ 到 $[0,1]$ 的函数,V^c 是典范赋值且满足条件:$w\in V^c(p)$,当且仅当,$p\in w$。

在证明真值引理之前,最困难的地方在于证明典范模型中的典范概率函数是存在的。即证明任给一个 $w\in W^c$,存在一个概率赋值函数 $\mu_w:\wp(W^c)\to[0,1]$ 可以同时解释 w 中所有的概率公式。

根据命题逻辑,可以证明对于所有的 $\psi\in\Phi$:

$$\vdash\psi\leftrightarrow\bigvee_{\{w\in W^c|\psi\in w\}}\varphi_w \text{ 以及,}$$

$$\vdash\varphi_w\to\neg\varphi_u,\text{对于任意 } w,u\in W^c \text{ 且 } w\neq u,$$

其中,φ_w 和 φ_u 分别表示 w 和 u 中所有公式的合取。运用概率公理和 PRM 规则就可以得到

$$\vdash P(\psi)=\sum_{\{w\in W^c|\psi\in w\}}P(\varphi_w)$$

根据这个等式和线性不等式的公理,可以证得,对于一个概率公式 $\psi\in\Phi$,ψ 是可证的等价于

$$\sum_{w\in W}c_wP(\varphi_w)\geqslant\beta$$

是可证的,其中 c_w 是一个合适的系数。

现在对于任意一个 $w\in W^c$ 以及 w 中的所有概率公式,这些概率公式都可以改写为上述线性等式或者不等式。那么,我们可以用一个形如 $x_w(X)$ 这样的变元来刻画这些线性等式或者不等式组的集合,其中 $X\subseteq W^c$。我们可以将 $x_w(X)$ 理解为我们所需要的那个概率赋值函数对 X 的赋值,即 $\mu^c_w(X)$。之前已经证明了对于 w 中的任意一个概率公式 ψ,都有一个线性不等式与它对应。由极大一致集的性质,可知对于任意概率公式 $\psi\in\Phi$,要么 $\psi\in w$,要么 $\psi\notin w$。如果 $\psi\in w$,对应的不等式方程为

$$\sum_{w'\in W^c}c_wx_w(\{w'\})\geqslant b,$$

如果 $\psi\notin w$,对应的不等式方程为

$$\sum_{w'\in W^c}c_{w'}x_w(\{w'\})<b,$$

最后,我们还有等式

$$\sum_{w'\in W^c}x_w(\{w'\})=1。$$

根据[9]定理 2.2,由于 φ_w 是一致的,上述线性等式和不等式方程组有一个解 $x^*_w(X)$,其中,$X\subseteq W^c$。令 $\mu^c_w(X)=x^*_w(X)$,这里的 μ^c 就是我们寻找的典范概率函数。

接下来我们证明真值引理。令 $M^c=\langle W^c,\mu^c,V^c\rangle$ 是基于 Φ 生成的典范 PPL 模型。只需证明对于任意的 $w\in W$ 和 $\psi\in\Phi$,$\mathcal{M}^c,w\models\psi$ 当且仅当 $\psi\in w$。施归纳于 ψ,当 ψ 是原子命题或布尔公式时易证,当 ψ 是概率公式 $\sum_{i=1}^n\alpha_iP(\chi_i)\geqslant\beta$ 时,

$\mathcal{M}^c,w\models\sum_{i=1}^n\alpha_iP(\chi_i)\geqslant\beta$ iff $\mathcal{M}^c,w\models\sum_{i=1}^n\sum_{u\in A}\alpha_iP(\varphi_u)\geqslant\beta$

(其中,$A=\{u\in W^c\Vdash\varphi_u\to\chi_i\}$)

iff $\sum_{i=1}^n\sum_{\mu\in A}\alpha_i\mu^c_w(\{u\})\geqslant\beta$

(根据语义)

iff $\sum_{i=1}^n\alpha_iP(\chi_i)\geqslant\beta\in w$

(根据概率函数存在引理)

典范模型中的可能世界集是有穷的,而概率函数 μ 对可能世界集的整个幂集都有赋值。也就是说,这里的典范模型除了是 PPL 模型之外,也是概率空间模型(σ 代数为可能世界集的幂集)和离散概率模型。因此,系统 **PPL** 相对于 PPL 框架类、概率空间框架类和离散概率框架类都是弱完全的。□

2.4 互模拟与框架可定义性

这一小节我们参考模态逻辑[4]的技术方法,讨论关于概率命题逻辑的互模拟和框架可定义性等相关问题。

定义 2.7(互模拟). 令 $\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$ 和 $\mathcal{M}'=\langle W',\mu',V'\rangle$ 为两个 PPL 模型。一个非空关系 $Z\subseteq W\times W'$ 被称为 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 之间的互模拟(记作 $\mathcal{M},w\underline{\leftrightarrow}\mathcal{M}',w'$),当且仅当,对于所有 $(w,w')\in Z$,

Inv 对于任意的 $p\in Prop$,$w\in V(p)$ 当且仅当 $w'\in V'(p)$;

Zig 对于所有 $X\subseteq W$,存在 $X'\subseteq W'$ 使得:

- 对于所有 $x'\in X'$,存在 $x\in X$ 使得 xZx';
- $\mu_w(X)\leqslant\mu'_{w'}(X)$;

Zag 对于所有 $X'\subseteq W'$,存在 $X\subseteq W$ 使得:

- 对于所有 $x\in X$,存在 $x'\in X'$ 使得 xZx';
- $\mu'_{w'}(X')\leqslant\mu_w(X)$。

定义 2.8(模态等价). 令 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 是两个基于语言 $\mathcal{L}_{PPL}$ 的 PPL 模型。称 $\mathcal{M},w$ 和 $\mathcal{M}',w'$ 是模态等价的,记作 $\mathcal{M},w\equiv\mathcal{M}',w'$,当且仅当,对于任意的 $\varphi\in\mathcal{L}_{PPL}$,$\mathcal{M},w\models\varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M}',w'\models\varphi$。

定理 2.2(互模拟蕴涵模态等价). 令$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$和$\mathcal{M}'=\langle W',\mu',V'\rangle$为 PPL 模型,$Z$ 为$\mathcal{M}$和$\mathcal{M}'$之间的互模拟。对于任意的 $\varphi\in\mathcal{L}_{PPL}$,$w\in W$ 和 $w'\in W'$,如果 wZw',那么$\mathcal{M},w\models\varphi$ 当且仅当$\mathcal{M}',w'\models\varphi$。即如果$\mathcal{M},w\underline{\leftrightarrow}\mathcal{M}',w'$,那么$\mathcal{M},w\equiv\mathcal{M}',w'$。

证明. 施归纳于公式 φ 并假设$\mathcal{M},w\underline{\leftrightarrow}\mathcal{M}',w'$。

· 基础情况:如果 φ 是一个原子命题 p,可以通过 **Inv** 直接得到:$\mathcal{M},w\models p$ 当且仅当$\mathcal{M}',w'\models p$。令归纳假设为对于任意 φ 的子公式$\psi(\psi\neq\varphi)$,$\mathcal{M},w\models\psi$当且仅当$\mathcal{M}',w'\models\psi$。

· 布尔公式:当 φ 是否定公式或合取公式时,可以通过归纳假设得证。

· 当 φ 是概率公式 $\alpha_1P(\varphi_1)+\cdots+\alpha_nP(\varphi_n)\geqslant\beta$ 时,假设$\mathcal{M},w\models\alpha_1P(\varphi_1)+\cdots+\alpha_nP(\varphi_n)\geqslant\beta$,那么根据语义有$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_w(\llbracket\varphi_i\rrbracket^{\mathcal{M}})\geqslant\beta$。对于每一个 $i\in\{0,\cdots,n\}$,$\llbracket\varphi_i\rrbracket^{\mathcal{M}}\subseteq W$,那么根据 **Zig**,存在 $X'_i\subseteq W'$使得对于所有的 $x'\in X'_i$,都存在 $x\in\llbracket\varphi_i\rrbracket^{\mathcal{M}}$ 使得 xZx'。由于对于任意的 $x'\in X'_i$存在 $x\in\llbracket\varphi_i\rrbracket^{\mathcal{M}}$使得 xZx',那么根据归纳假设有$\mathcal{M}',x'\models\varphi_i$当且仅当$\mathcal{M},x\models\varphi_i$。由此,$X'_i\subseteq\llbracket\varphi_i\rrbracket^{\mathcal{M}'}$。根据 **Zig** 和概率函数的性质我们有,对于任意的 $i\in\{0,\cdots,n\}$,$\mu_w(\llbracket\varphi_i\rrbracket^{\mathcal{M}})\leqslant\mu_w(X'_i)\leqslant\mu'_{w'}(\llbracket\varphi_i\rrbracket^{\mathcal{M}'})$。因此$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu'_{w'}(\llbracket\varphi_i\rrbracket^{\mathcal{M}'})\geqslant\beta$,即$\mathcal{M}',w'\models\alpha_1P(\varphi_1)+\cdots+\alpha_nP(\varphi_n)\geqslant\beta$。另一个方向可用 **Zag** 条件通过类似方法证明。 □

由于 **PPL** 模型是有穷的,参考 Hennessy - Milner 定理[4],上述定理的逆命题也是成立的。

定理 2.3(模态等价蕴涵互模拟). 令$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$和$\mathcal{M}'=\langle W',\mu',V'\rangle$为 PPL 模型,对于任意的 $w\in W$ 和 $w'\in W'$,如果$\mathcal{M},w\equiv\mathcal{M}',w'$,那么$\mathcal{M},w\underline{\leftrightarrow}\mathcal{M}',w'$。

证明. 令 $Z=\{(w,w')\mid\mathcal{M},w\equiv\mathcal{M}',w'\}\subseteq W\times W'$。只需证明 Z 关系是互模拟关系即可。互模拟的三个条件中,原子命题不变 **Inv** 是显然成立的,以下我们给出 **Zig** 的证明,**Zag** 的证明与其类似。

任取 $X\subseteq W$,令 $X=\{w_1,\cdots,w_n\}$。当 $\mu_w(X)=0$ 时,在 **Zig** 中,令 $X'=\varnothing$,那么 **Zig** 显然成立。当 $\mu_w(X)>0$ 时,我们用反正法。假设对于任意的 $X'\models W'$都有

(1)存在 $x'\in X'$对于 $x\in X$ 都有 $x\not\equiv x'$,或者,

(2)$\mu_w(X)>\mu_{w'}(X')$。

由此可知,对于 W'子集中的每一个单元集$\{w'\}$,都有上述析取命题成立。接下来,我们再用反证法证明,存在一些单元集不满足(1),因而满足(2)。

假设所有的单元集都满足(1)。那么对于任意的 $w'\in W'$,对于任意 $x\in X$,都有 $x\not\equiv w'$。由于 W'是有穷的,令 $W'=\{w'_1,\cdots,w'_m\}$。因此,对于 $w'_1\in W'$而言,在 X 中的每一个 w_i,都存在一个公式ψ_i,使得$\mathcal{M},w\models\psi_i$且$\mathcal{M}',w'_i\not\models\psi_i$。故,$\mathcal{M}',w'_1\models\neg(\psi_1\vee\psi_2\vee\cdots\vee\psi_n)$。令$\psi_1\vee\psi_2\vee\cdots\vee\psi_n$为 φ_1,$X\subseteq\llbracket\varphi_1\rrbracket^{\mathcal{M}}$。按照同样的思路,我们可以得到,对于任意一个$w'_i\in W'$,都存在公式 φ_i,使得$\mathcal{M}',w'_i\models\neg\varphi_i$,且 $X\subseteq\llbracket\varphi_i\rrbracket^{\mathcal{M}}$。再令 $\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\cdots\wedge\varphi_n$为 φ。那么我们有,$\mathcal{M}'\models\neg\varphi$(即 φ 在整个模型$\mathcal{M}'$中为假)和 $X\subseteq\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}}$。由于$\mathcal{M}'\models\neg\varphi$,所以$\mathcal{M}',w'\models P(\varphi)=0$。因为$\mathcal{M},w\equiv\mathcal{M}',w'$,所以,根据语义,$\mathcal{M},w\models P(\varphi)=0$。但是,因为 $X\subseteq\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}}$,$\mu_w(X)>0$ 以及概率函数的单调性,可知$\mu_w(\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}})>0$,因此有$\mathcal{M},w\models P(\varphi)>0$。故而矛盾。

因此,存在一些单元集$\{u'\}\subseteq W'$不满足(1),因而满足(2)。我们将这些单元集全部并起来命名为 Y'。根据上述证明思路,可以找到一个公式 φ,使得 $X\subseteq\llbracket\varphi\rrbracket^{M}$并且对于所有的 $w'\in W'\setminus Y'$,$\mathcal{M}',w'\models\neg\varphi$,即 $W'\setminus Y'\subseteq\llbracket\neg\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}'}$,由此可知$\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}'}\subseteq Y'$。因为 $\mu_w(X)>0$,所以$\mathcal{M},w\models P(\varphi)=\beta$,其中 $\beta>0$。又因为 $\mu_w(X)>u'_{w'}(Y')$,所以有$\mathcal{M}',w'\models P(\varphi)<\beta$。故而矛盾。因此,**Zig** 成立,按照类似的方法,**Zag** 也是成立的。 □

与模态逻辑框架类似,在 PPL 框架中,也有一些特殊的框架类。

定义 2.9(框架性质). 任给一个 PPL 框架$\mathcal{F}=\langle W,\mu\rangle$,称

· $\mathcal{F}$是一个概率自反框架,当且仅当,对于所有的 $w\in W$ 和 $w\in X\subseteq W$,$\mu_w(X)>0$。即 $\mu_w(\{w\})>0$

(因为μ是概率赋值函数,具有单调性)。

·$\mathcal{F}$是一个概率仅自反框架,当且仅当,对于所有的$w\in W$,$\mu_w(\{w\})=1$。

·$\mathcal{F}$是一个概率反自反(或者禁自反)框架,当且仅当,对于所有的$w\in W$,$u_w(\{w\})=0$。

·$\mathcal{F}$是一个概率对称框架,当且仅当,对于任意的$w,w'\in W$,如果$\mu_w(\{w'\})>0$,那么$\mu_{w'}(\{w\})>0$。

·$\mathcal{F}$是一个强概率对称框架,当且仅当,对于任意的$w,w'\in W$和任意$\beta\in[0,1]$,如果$\mu_w(\{w'\})=\beta$,那么$\mu_{w'}(\{w\})=\beta$。

·$\mathcal{F}$是一个概率传递框架,当且仅当,对于任意的$w,u,v\in W$,如果$\mu_w(\{u\})>0$并且$\mu_u(\{v\})>0$那么$\mu_w(\{v\})>0$。

定义2.10(框架可定义性). 令Γ为$\mathcal{L}_{PPL}$公式集,P为某个框架性质。对于任意的一个概率框架$\mathcal{F}$,如果有$\mathcal{F}$具有P性质,当且仅当,$\mathcal{F}\models\Gamma$,那么我们就称公式集Γ定义了性质P。特别地,如果Γ是一个类似$\{\varphi\}$的单元集,我们就称公式φ定义了性质P。我们称某个性质在$\mathcal{L}_{PPL}$中是可定义的,当且仅当,存在某个基于$\mathcal{L}_{PPL}$的公式集定义该性质。

命题2.2. 定义2.9中的部分框架性质在$\mathcal{L}_{PPL}$中是可定义的。具体如下:

·$\mathcal{F}\models p\to P(p)>0$,当且仅当,$\mathcal{F}$是概率自反框架。

·$\mathcal{F}\models p\to P(p)=1$,当且仅当,$\mathcal{F}$是概率仅自反框架。

·$\mathcal{F}\models p\to P(P(p)>0)=1$,当且仅当,$\mathcal{F}$是概率对称框架。

·$\mathcal{F}\models P(P(p)>0)>0\to P(p)>0$,当且仅当,$\mathcal{F}$是概率传递框架。

证明. 给一个PPL框架$\mathcal{F}=\langle W,\mu\rangle$,这里只证明第三个命题,其它命题的证明类似:

·**从右到左:**假设$\mathcal{F}$是一个概率对称框架。对于任意的$w\in W$和赋值函数V,假设$\mathcal{F},V,w\models p$,即$\{w\}\subseteq V(p)$。令$X=\{u\mid\mu_w(\{u\})>0\}$,显然,$\mu_w(X)=1$。由于$\mathcal{F}$是概率对称框架,我们有对于任意的$u\in X$,$\mu_u(\{w\})>0$。根据$\{w\}\subseteq V(p)$,我们有对于任意的$u\in X$,$M,u\models P(p)>0$,也就是说,$X=[\![P(p)>0]\!]$。因此,$\mathcal{F},V,w\models p\to P(P(p)>0)=1$。

·**从左到右:**先假设$\mathcal{F}$不是一个概率对称框架,只需证$\mathcal{F}\not\models p\to P(P(p)>0)=1$即可。由于$\mathcal{F}$不是一个概率对称框架,那么存在$w,w'\in W$使得$\mu_w(\{w'\})>0$且$\mu'_w(\{w\})=0$。令$V(p)=\{w\}$,由$\mu'_w(\{w\})=0$可知$\mathcal{F},V,w'\not\models P(p)>0$,即$w'\notin[\![P(p)>0]\!]$。再假设$\mu_w([\![P(p)>0]\!])=1$,由于$\mu_w(\{w'\})>0$,且$\{w'\}\cap[\![P(p)>0]\!]=\phi$。根据概率函数的性质,$\mu_w(\{w'\}\cup[\![P(p)>0]\!])>1$,与概率函数的定义矛盾。因此,$\mu_w([\![P(p)>0]\!])\neq1$。进而,我们有$\mathcal{F},V,w\not\models p\to P(P(p)>0)=1$。因此,$\mathcal{F}\not\models p\to P(P(p)>0)=1$。

□

命题2.3. 定义2.9中的部分框架性质在$\mathcal{L}_{PPL}$中是不可定义的。具体如下:

·概率反自反框架在$\mathcal{L}_{PPL}$中是不可定义的;

·概率强对称框架在$\mathcal{L}_{PPL}$中是不可定义的。

证明. ·假设概率反自反框架在$\mathcal{L}_{PPL}$中是可定义的,那么存在某个基于$\mathcal{L}_{PPL}$的公式集Γ,使得对于任意的$\mathcal{F}$,$\mathcal{F}\models\Gamma$当且仅当$\mathcal{F}$是反自反框架。考虑PPL框架$\mathcal{F}=\langle W,\mu\rangle$,其中$W=\{w\}$,$\mu_w(\{w\})=1$。显然$\mathcal{F}$不是一个反自反框架,那么$\mathcal{F}\not\models\Gamma$,即存在一个基于$\mathcal{F}$的模型$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$使得$\mathcal{M},w\not\models\Gamma$。我们依照模型$\mathcal{M}$生成另一个模型$\mathcal{M}'=\langle W',\mu',V'\rangle$,使得$W'=\{w_1,w_2\}$,$\mu_{w1}(\{w_2\})=1$,$\mu_{w2}(\{w_1\})=1$,$\mu_{w1}(\{w_1\})=0$,$\mu_{w2}(\{w_2\})=0$,并且对于任意的原子命题$p\in Prop$,都有$w\in V(p)$当且仅当$w_1\in V'(p)$且$w_2\in V'(p)$。根据定义2.7,可知$\mathcal{M},w\,\underline{\leftrightarrow}\,\mathcal{M}',w_1$且$\mathcal{M},w\,\underline{\leftrightarrow}\,\mathcal{M}',w_2$。因为$\mathcal{M},w\not\models\Gamma$,所以根据定理2.2,$\mathcal{M}',w_1\not\models\Gamma$。但是,框架$\mathcal{F}'$是反自反框架,根据假设,$\mathcal{F}\models\Gamma$。因此,概率反自反框架在$\mathcal{L}_{PPL}$中是不可定义的。

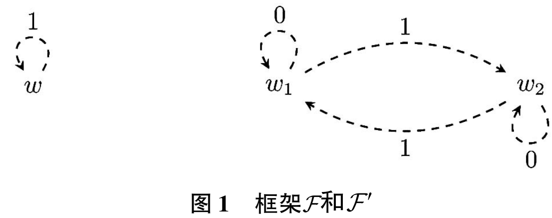

图1 框架$\mathcal{F}$和$\mathcal{F}'$

· 与上述证明思路相同,考虑如下两个框架(图 2):

图 2 中,左边的框架$\mathcal{F}$是强概率对称框架,而右边的$\mathcal{F}'$则不是。基于$\mathcal{F}$和$\mathcal{F}'$可以生成两个互模拟的模型,其中,w 和 w'对原子命题的赋值相同,u、u'_1和u'_2的原子命题赋值相同。由此,按照同样的思路,我们可以证明强概率对称框架类是不可定义的。 □

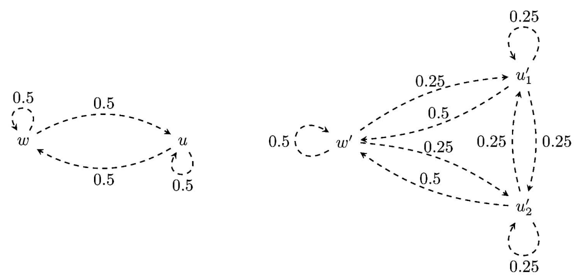

图 2 框架$\mathcal{F}$和$\mathcal{F}'$

除了这两个框架不可定义之外,死点框架[①]也是不可定义的,因为概率函数的性质保证了在任意的点 $w \in W$ 上,都有 $\mu_w(W)=1$。

如果将 $P(\cdot)>0$ 看作正规模态逻辑中的◇算子,将 $P(\cdot)=1$ 看作□算子,命题 2.2 中定义框架性质的那些公式与经典模态逻辑中定义框架性质的特征公式在形式上是相似的。我们猜想给定一个 PPL 框架,可以诱导一个满足持续性的关系语义学的框架,但从关系语义学的框架很难生成一个 PPL 框架。

3 动态概率命题逻辑

在这一节,我们对 PPL 进行动态的扩充,参考认知逻辑动态化的方法在 PPL 中加入公开宣告[18]这一动作。因为我们讨论的概率是主观概率,所以从直观上,如果某个公式被成功宣告,那么对应的,主体的主观概率也需要相应改变。

定义 3.1(语言 PPL!). 给定原子命题集 $Prop$,基于公开宣告的概率命题逻辑的语言$\mathcal{L}_{PPL}!$ 定义如下:

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi\wedge\varphi \mid \alpha_1 P(\varphi_1)+\cdots+\alpha_n P(\varphi_n)\geqslant\beta \mid [\varphi_1]\varphi_2$$

其中,$p\in Prop$,公式$[\varphi_1]\varphi_2$的直观意思为“宣告 φ_1 之后 φ_2 为真”。其它逻辑符号的定义与语言$\mathcal{L}_{PPL}$一致。

定义 3.2(更新模型). 给定一个 PPL 模型$\mathcal{M}=\langle W,\mu,N,V\rangle$,一个可能世界 $w\in W$ 和一个公式 $\varphi\in\mathcal{L}_{PPL}!$。更新模型$\mathcal{M}^{\varphi}=\langle W^{\varphi},\mu^{\varphi},V^{\varphi}\rangle$定义如下:

· $W^{\varphi}=W$;

· $\mu^{\varphi}: W^{\varphi}\to(\wp(W^{\varphi})\to[0,1])$是一个概率函数,具体如下:

$$\mu^{\varphi}_w(X)=\begin{cases}\mu_w(X), & \text{如果}\ \mu_w([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})=0\\ \dfrac{\mu_w(X\cap[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})}{\mu_w([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})}, & \text{如果}\ \mu_w([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})>0\end{cases}$$

– 对于任意的 $p\in Prop$,$V^{\varphi}(p)=V(p)$。

定义 3.3(语义$\models$). 给定一个 PPL 模型$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$,一个可能世界 $w\in W$ 和一个公式 $\varphi\in\mathcal{L}_{PPL}!$。点模型$\mathcal{M},w$ 满足 φ 归纳定义如下[②]:

$$\boxed{\mathcal{M},w\models[\varphi]\psi \quad \text{iff} \quad \mathcal{M}^{\varphi},w\models\psi}$$

特别地,宣告公式$[\varphi]\psi$是自对偶的,即$[\varphi]\psi$与其对偶公式$\langle\varphi\rangle\psi$之间是等值的。

例 1. 令 PPL 模型$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$,如图 3,其中

· $W=\{w_1,w_2\}$;

· $\mu_{w1}(\{w_1\})=\dfrac{2}{3}$,$\mu_{w1}(\{w_2\})=\dfrac{1}{3}$,$\mu_{w2}(\{w_1\})=0$,$\mu_{w2}(\{w_2\})=1$;

· $V(p)=\{w_1\}$。

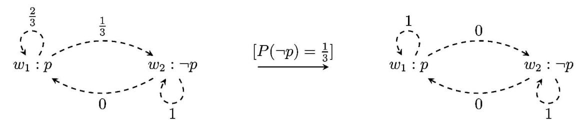

图 3:更新前的$\mathcal{M}$和更新后的$\mathcal{M}^{P(\neg p)=\frac{1}{3}}$

通过图 3,我们知道

· $\mathcal{M},w_1\models P(\neg p)=\dfrac{1}{3}$

· $\mathcal{M},w_1\not\models[P(\neg p)=\dfrac{1}{3}]P(\neg p)=\dfrac{1}{3}$

· $\mathcal{M},w_1\models[P(\neg p)=\dfrac{1}{3}]P(P(\neg p)=\dfrac{1}{3})=0$

这里有一个反直观的结果,宣告 $P(\neg p)=\dfrac{1}{3}$ 之后,公式 $P(\neg p)=\dfrac{1}{3}$的概率反而为 0。这是因为当宣告 $P(\neg p)=\dfrac{1}{3}$时,对于 w_1上的主体来说就是肯定了当前点的真实性,这样使得主体对$\{w_2\}$

的概率赋值为 0;而对于 w_2 上的主体来说,宣告的内容是概率为 0 的公式,此时主体保持原有的概率赋值不变。

引理 3.1. 给定 PPL 模型 $\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$,如果$\psi$是一个不带有概率算子的 $\mathcal{L}_{PPL!}$ 公式,那么 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}=[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}\varphi}$。

证明. 施归纳于公式ψ。

· $\psi:=p$,那么根据 $V^{\varphi}(p)$ 的定义,我们可以直接得到$[\![p]\!]^{\mathcal{M}}=[\![p]\!]^{\mathcal{M}\varphi}$。令归纳假设 I. H. 为对于任意$\psi$的子公式$\chi(\chi\neq\psi)$,$\mathcal{M},w\models\chi$ 当且仅当$\mathcal{M}^{\varphi},w\models\chi$,即$[\![\chi]\!]^{\mathcal{M}}=[\![\chi]\!]^{\mathcal{M}\varphi}$。

· 布尔公式的情形易证。

· $\psi:=[\psi_1]\psi_2$

$\mathcal{M},w\models[\psi_1]\psi_2$

iff $\mathcal{M}^{\psi_1},w\models\psi_2$(根据语义)

iff $(\mathcal{M}\varphi)^{\psi_1},w\models\psi_2$(根据 I. H.:$\mathcal{M}^{\psi_1},w\models\psi_2$ 当且仅当$(\mathcal{M}^{\varphi})^{\psi_1},w\models\psi_2$)

iff $M^{\varphi},w\models[\psi_1]\psi_2$(根据语义) □

引理 3.2. 给定一个 PPL 模型$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$,如果$\mathcal{M},w\models P(\varphi)=1$,那么对于任意$\psi\in\mathcal{L}_{PPL!}$ 都有$[\psi]^{\mathcal{M}}=\psi^{\mathcal{M}\varphi}$。

证明. 施归纳于公式ψ。

· 如果$\psi:=p$,那么根据 $V^{\varphi}(p)$ 的定义,我们可以直接得到$[\![p]\!]^{\mathcal{M}}=[\![p]\!]^{\mathcal{M}\varphi}$。令归纳假设 I. H. 为对于任意$\psi$的子公式$\chi(\chi\neq\psi)$,$\mathcal{M},w\models\chi$ 当且仅当$\mathcal{M}^{\varphi},w\models\chi$,即$[\![\chi]\!]^{\mathcal{M}}=[\![\chi]\!]^{\mathcal{M}\varphi}$。

· 布尔公式的证明比较简单,宣告公式与上面的证明类似,这里省略。

· $\psi:=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\chi_i)\geqslant\beta$

$\mathcal{M},w\models\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\chi_i)\geqslant\beta$

iff $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_w([\![\chi_i]\!]^{\mathcal{M}})\geqslant\beta$(根据语义)

iff $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_w([\![\chi_i]\!]^{\mathcal{M}}\cap[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})\geqslant\beta$(根据$\mathcal{M},w\models P(\varphi)=1$)

iff $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i\mu_w([\![\chi_i]\!]^{\mathcal{M}}\cap[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})}{\mu_w([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})}\geqslant\beta$(根据$\mathcal{M},w\models P(\varphi)=1$)

iff $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\dfrac{\mu_w([\![\chi_i]\!]^{\mathcal{M}\varphi}\cap[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})}{\mu_w([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})}\geqslant\beta$(根据 I. H.)

iff $\mathcal{M}^{\varphi},w\models\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\chi_i)\geqslant\beta$(根据语义) □

命题 3.1. 归约公理:

· $\models[\varphi]p\leftrightarrow p$

· $\models[\varphi]\neg\psi\leftrightarrow\neg[\varphi]\psi$

· $\models[\varphi](\psi\wedge\chi)\leftrightarrow([\varphi]\psi\wedge[\varphi]\chi)$

· $\models[\varphi](\psi\rightarrow\chi)\leftrightarrow([\varphi]\psi\rightarrow[\varphi]\chi)$

· $\models P(\varphi)=0\rightarrow([\varphi]\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\varphi_i)\geqslant\beta\leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\varphi_i)\geqslant\beta)$

· $\models P(\varphi)>0\rightarrow([\varphi]\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\varphi_i)\geqslant\beta\leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\varphi\wedge[\varphi]\varphi_i)\geqslant\beta P(\varphi))$

证明. 关于原子命题和布尔公式的归约公理的有效性证明在[6]中已有讨论,因此这里我们只证明关于$P(\varphi)>0$ 时的归约公理。

任取点模型$(\mathcal{M},w)$,如果$\mathcal{M},w\models P(\varphi)>0$,那么只需证

$\mathcal{M},w\models[\varphi]\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\varphi_i)\geqslant\beta\leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\varphi\wedge[\varphi]\varphi_i)\geqslant\beta P(\varphi)$。

$\mathcal{M},w\models[\varphi]\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\varphi_i)\geqslant\beta$

iff $\mathcal{M}^{\varphi},w\models\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\varphi_i)\geqslant\beta$(根据语义)

iff $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_w^{\varphi}([\![\varphi_i]\!]^{\mathcal{M}\varphi})\geqslant\beta$(根据语义)

iff $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\dfrac{\mu_w([\![\varphi_i]\!]^{\mathcal{M}\varphi}\cap[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})}{\mu_w([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})}\geqslant\beta$

iff $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$

$\dfrac{\mu_{i,w}(([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}\cap[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}})\cup([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}\cap[\![\varphi_i]\!]^{\mathcal{M}\varphi}))}{\mu_w([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})}\geqslant\beta$

iff $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\dfrac{\mu_{i,w}([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}\cap([\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}}\cup[\![\psi_i]\!]^{\mathcal{M}\varphi}))}{\mu_w([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})}$

$\geqslant\beta$

iff $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\dfrac{\mu_{i,w}([\![\varphi\wedge[\![\varphi]\!]\varphi_i]\!]^{\mathcal{M}})}{\mu_w([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})}\geqslant\beta$

iff $\mathcal{M},w\models\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(\varphi\wedge[\![\varphi]\!]\varphi_i)\geqslant\beta P(\varphi)$(根据语义) □

定义 3.4(PPL!). 基于概率命题逻辑的公开宣告逻辑 **PPL!** 由表 2 给出。公理系统 **PPL!** 在库伊[15]

PDEL 基础上删掉与认知算子相关的公理和规则并加入 **RE!** 规则构成。

从更新模型的定义 3.2 上看,更新后的模型并没有册删除世界,这就导致了经典的公开宣告逻辑中组合公理在这里是失效的。在公理系统 **PPL!** 中,为了实现在连续宣告上的归约,我们引入了 RE! 规则。与组合公理不同的是,RE! 是一种自内向外的归约方式,而组合公理是自外向内的归约,这两种方式都可以用来把连续宣告公式归约到原逻辑上[21]。

定义 3.5(翻译). 翻译是一个函数 t:$\mathcal{L}_{PPL!} \to \mathcal{L}_{PPL}$,把概率公开宣告逻辑语言$\mathcal{L}_{PPL!}$ 翻译为概率命题逻辑语言$\mathcal{L}_{PPL}$,满足

- $t(p)=p$;
- $t(\neg\varphi)=\neg t(\varphi)$;
- $t(\varphi\wedge\psi)=t(\varphi)\wedge t(\psi)$;
- $t(\sum_{i=1}^{n}\alpha_k P(\varphi_i)\geqslant\beta)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_i P(t(\varphi_i))\geqslant\beta$;
- $t([\varphi]p)=t(p)$;
- $t([\varphi]\neg\psi)=t(\neg[\varphi]\psi)$;
- $t([\varphi](\psi\wedge\chi))=t([\varphi]\psi\wedge[\varphi]\chi)$;
- $t([\varphi][\psi]\chi)=t([\varphi]t([\psi]\chi))$;
- $t([\varphi]\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(\psi_i)\geqslant\beta)=(P(t(\varphi))>0)\wedge(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(\varphi\wedge[\varphi]\varphi_i)\geqslant\beta P(\varphi))\vee(P(t(\varphi))=0)\wedge((\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(\varphi_i)\geqslant\beta))$。

引理 3.3. 任给公式 $\varphi\in L_{PPL!}$,都有 $\vdash\varphi\leftrightarrow t(\varphi)$。

证明. 该引理的证明依赖于复杂度的概念,具体可以参考[6]。在证明过程中,施归纳于公式 φ 的复杂度,当 φ 是概率公式的时候,应用! P_0 和! P 公理可以证明 $\vdash[\varphi]\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(\psi_i)\geqslant\beta\leftrightarrow t([\varphi]\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(\psi_i)\geqslant\beta)$。特别地,当 φ 是形如$[\psi_1][\psi_2]\chi$ 的公式时,根据归纳假设,$\vdash[\psi_2]\chi\leftrightarrow t([\psi_2]\chi)$,再根据规则 RE! 可知 $\vdash[\psi_1][\psi_2]\chi\leftrightarrow[\psi_1]t([\psi_2]\chi)$。由于公式$[\psi_1]t([\psi_2]\chi)$的复杂度低于$[\psi_1][\psi_2]\chi$ 的复杂度,所以根据归纳假设,有 $\vdash[\psi_1]t([\psi_2]\chi)\leftrightarrow t([\psi_1]t([\psi_2]\chi))$。因此,我们有 $\vdash[\psi_1][\psi_2]\chi\leftrightarrow t([\psi_1][\psi_2]\chi)$。

□

定理 3.4(PPL! 的可靠性与完全性). 概率公开宣告逻辑的公理系统 **PPL!** 相对于 PPL 框架类是可靠且弱完全的。

证明. 可靠性由定理2.1 和命题3.1 直接得出。对于完全性,我们只需证,对于任意的 $\varphi\in\mathcal{L}_{PPL}$,都有

$$\models\varphi \quad\Rightarrow\quad \vdash\varphi。$$

表 2 **公理系统 PPL!**

系统 **PPL!**			
Axioms			
TAUT	所有的命题逻辑重言式	INEQ	线性不等式公理
P_1	$P(\varphi)\geqslant 0$	P_2	$P(T)=1$
P_3	$P(\varphi\wedge\psi)+P(\varphi\wedge\neg\psi)=P(\varphi)$		
! ATOM	$[\varphi]p\leftrightarrow p$	! NEG	$[\varphi]\neg\psi\leftrightarrow\neg[\varphi]\psi$
! CON	$[\varphi](\psi\wedge\chi)\leftrightarrow([\varphi]\psi\wedge[\varphi]\chi)$	! DIST	$[\varphi](\psi\to\chi)\leftrightarrow([\varphi]\psi\to[\varphi]\chi)$
! P_0	$P(\varphi)=0\to([\varphi]\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(\varphi_i)\geqslant\beta\leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(\varphi_i)\geqslant\beta)$		
! P	$P(\varphi)>0\to([\varphi]\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(\varphi_i)\geqslant\beta\leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(\varphi\wedge[\varphi]\varphi_i)\geqslant\beta P(\varphi))$		
Rules			
MP	$\dfrac{\varphi,\varphi\to\psi}{\psi}$	PRE	$\dfrac{\varphi\leftrightarrow\psi}{P(\varphi)=P(\psi)}$
RE!	$\dfrac{\psi\leftrightarrow\chi}{[\varphi]\psi\leftrightarrow[\varphi]\chi}$		

令$\models\varphi$,根据引理3.3, $\vdash\varphi\leftrightarrow t(\varphi)$。根据可靠性,$\models\varphi\leftrightarrow t(\varphi)$,因此,$\models t(\varphi)$。由于$t(\varphi)\in L_{PPL}$,根据 **PPL** 的完全性(定理2.1)可知, $\vdash t(\varphi)$。进而,我们有 $\vdash\varphi$。 □

4 条件概率算子与公开宣告算子

这一节讨论条件概率算子与公开宣告算子之间的关系。如前所述,本文讨论的概率是一种主观概率。直观上看,在以ψ为条件的情况下某个公式φ的概率应该与公开宣告ψ之后φ的概率相等。但库伊[15]与范丙申[2]都否认了这一点。接下来我们要讨论的重点是宣告ψ之后φ的概率和以ψ为条件的情况下φ的概率之间具有的关系。

首先,我们在语言$\mathcal{L}_{PPL}!$中加入二元条件概率算子组成一个新的语言$\mathcal{L}_{PPLC!}$。具体定义如下:

$$\varphi::=p\mid\bot\mid\neg\varphi\mid\varphi\wedge\varphi\mid\alpha_1P(\varphi_1)+\cdots+\alpha_nP(\varphi_n)\geqslant\beta\mid CP(\varphi_1|\varphi_2)\geqslant\beta\mid[\varphi_1]\varphi_2$$

公式$CP(\varphi_1|\varphi_2)\geqslant\beta$被称为条件概率公式,直观意思为"以$\varphi_2$为条件,$\varphi_1$的概率大于等于$\beta$"。给定一个PPL模型$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$和一个可能世界$w\in W$,条件概率公式$CP(\varphi_1|\varphi_2)\geqslant\beta$的语义为:

$$\mathcal{M},w\models CP(\varphi_1|\varphi_2)\geqslant\beta \quad \text{iff} \quad \mu_w([\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{M}})=0,$$
或者,
$$\mu_w([\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{M}})>0,\text{并且}\frac{\mu_w([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}}\cap[\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{M}})}{\mu_w([\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{M}})}\geqslant\beta$$

语言$\mathcal{L}_{PPLC!}$中的其它公式的语义定义与定义2.5和定义3.3一致。从这个语义出发,可知公式

$$P(\varphi)\geqslant\beta\leftrightarrow CP(\varphi|\top)\geqslant\beta$$

和公式

$$CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow(P(\psi)=0\vee(P(\psi)>0\wedge P(\varphi\wedge\psi)\geqslant\beta P(\psi)))$$ ③

是有效式。

在文献中,对于条件概率公式的语义解释至少有两种,一种是在一元的概率函数的基础上定义条件概率公式[19],另一种是在二元的概率函数基础上定义条件概率公式[1,11],这种情况下往往对这个二元概率函数有一系列的要求。我们采用的是前一种,并且这里的条件概率算子也满足后一种定义中的若干要求。

命题4.1. 以下公式是有效的:

1. $\models P(\varphi)>0\rightarrow CP(\varphi|\varphi)=1$;
2. $\models(P(\varphi\wedge\psi)=0\wedge P(\chi)>0)\rightarrow CP(\varphi\vee\psi|\chi)=CP(\varphi|\chi)+CP(\psi|\chi)$;
3. $\models P(\chi)>0\rightarrow CP(\varphi\wedge\psi|\chi)=CP(\varphi|\psi\wedge\chi)\cdot CP(\psi|\chi)$。

当条件概率公式$CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta$中$\psi$的概率为0时,文献中对条件概率$CP(\varphi|\psi)$有着不同的定义。比如,雷尼(Renyi)[20]认为当ψ的概率为0时,对于任意的φ,都有$CP(\varphi|\psi)=1$;哈尔彭[11]就严格规定了在条件概率公式中作为条件的公式概率不能为0;巴尔塔格(Baltag)[1]在二元函数的基础上加以若干条件的限制来定义条件概率,从而规避ψ的概率为0的情况;拉斯科维奇[19]认为当ψ的概率为0时,条件概率$CP(\varphi|\psi)$可以为[0,1]区间内的任意值。在本文中,当ψ的概率为0时,条件概率公式$CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta$恒为真。

在条件概率公式$CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta$和宣告公式$[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta$的关系方面,可以确定的是,二者之间不具有当且仅当的关系。

命题4.2.

$$\not\models CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta$$

证明. 回到例1中的模型$\mathcal{M}$和更新后的$\mathcal{M}^{P(\neg p)=\frac{1}{3}}$。

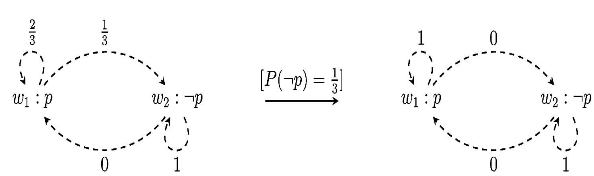

图4 更新前的$\mathcal{M}$和更新后的$\mathcal{M}^{P(\neg p)=1/3}$

根据模型$\mathcal{M}$,更新后的$\mathcal{M}^{P(\neg p)=\frac{1}{3}}$以及图4,

$$\mathcal{M},w_1\models[P(\neg p)=\frac{1}{3}]P(P(\neg p)=\frac{1}{3})=0,$$

$$\mathcal{M},w_1\models CP(P(\neg p)=\frac{1}{3}|P(\neg p)=\frac{1}{3})=1。$$

□

如果我们不用概率公式去更新,即$CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta$和$[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta$中的$\psi$不是一个概率公式,是否会得到不同的结果呢?在图4中,我们也可以不用概率

公式而用原子命题 p 更新模型$\mathcal{M}$。因为在$\mathcal{M}$中,p 和 $P(\neg p)=\frac{1}{3}$有同样的外延,更新后的模型$\mathcal{M}^p$和$\mathcal{M}^{P(\neg p)=\frac{1}{3}}$是同一个模型。因此,我们可以得到同样的结果,即

$$M,w_1 \models [p]P(P(\neg p)=\frac{1}{3})=0,$$

$$M,w_1 \models CP(P(\neg p)=\frac{1}{3}|p)=1。$$

可见在 $CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta$ 和$[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta$ 之间,把ψ限制在不带有概率公式的 L_{PL}上依旧不能使得它们之间是等价的。但是,如果我们把 φ 限制在 L_{PL}上就能够证明两个公式之间的等价。

命题 4.3. 在任意的 PPL 框架下,对于任意的$\varphi\in L_{PL}$,都有

$$\models P(\psi)>0\to(CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta)$$

证明. 对于任意的 PPL 模型$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$和任意的可能世界 $w\in W$,假设$\mathcal{M},w\models P(\psi)>0$,根据语义有$\mu_w(\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})>0$。再根据以下证明,

$$\mathcal{M},w\models CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta \quad \text{iff} \quad \frac{\mu_w(\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}}\cap\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}{\mu_w(\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}\geqslant\beta$$

(根据语义)

$$\text{iff} \quad \frac{\mu_w(\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}^\psi}\cap\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}{\mu_w(\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}\geqslant\beta \text{(根据引理 3.1)}$$

$$\text{iff} \quad \mathcal{M},w\models[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta \text{(根据语义)}$$

因为点模型$\mathcal{M},w$ 是任意的,因此,$\models P(\psi)>0\to(CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta)$。 □

此外,当 $CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta$ 和$[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta$ 中的ψ概率为 1 时,对于任意的 $\varphi\in\mathcal{L}_{PPLC!}$,都有 $CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta$ 和$[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta$ 等值。

命题 4.4. 对于任意的 PPL 模型$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$和任意的可能世界 $w\in W$,如果ψ概率为 1 时,那么$\mathcal{M},w\models CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta$。即,

$$\models P(\psi)=1\to(CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta)$$

证明. 该命题的证明比较简单。当ψ的概率为 0 或者为 1 时,根据条件概率公式的语义可以直接得到$\models CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow P(\varphi)\geqslant\beta$。类似地,根据引理 3.2,也可以得到$\models[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta\leftrightarrow P(\varphi)\geqslant\beta$。 □

如果宣告ψ并不影响 φ 的真值,那么在ψ的概率大于 0 的情况下,就有 $CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta$,即

命题 4.5.

$$\models(P(\psi)>0\wedge[\psi]\varphi\leftrightarrow\varphi)\to(CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta)$$

证明. 对于任意的 PPL 模型$\mathcal{M}=\langle W,\mu,V\rangle$和任意的可能世界 $w\in W$,先假设$\mathcal{M},w\models P(\psi)>0$,即 $\mu_w(\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})>0$。再假设$\mathcal{M},w\models[\psi]\varphi\leftrightarrow\varphi$,根据语义可以得到$\mathcal{M}^\psi,w\models\varphi$ 当且仅当$\mathcal{M},w\models\varphi$,即$\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}^\psi}=\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}}$。由此可得$\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}^\psi}\cap\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}}=\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}}\cap\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}}$。进而由 $\mu_w(\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})>0$,就有$\frac{\mu_w(\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}^\psi}\cap\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}{\mu_w(\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}=\frac{\mu_w(\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}}\cap\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}{\mu_w(\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}$。因此,我们有$\mathcal{M},w\models CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta$。 □

库伊[15]和范丙申[2]提出的猜想在这里也是有效的,并且这个猜想可以看作是上述命题的一种等价表达。

命题 4.6.

$$\models P(\psi)>0\to(CP([\psi]\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta)$$

证明. 任给一个 PPL 的点模型$\mathcal{M},w$,当$\mathcal{M},w\models P(\psi)>0$时,

$$\mathcal{M},w\models CP([\psi]\varphi|\psi)\geqslant\beta$$

$$\text{iff} \quad \frac{\mu_w(\llbracket[\psi]\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}}\cap\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}{\mu_w(\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}\geqslant\beta$$

$$\text{iff} \quad \frac{\mu_w((\llbracket\neg\psi\rrbracket^{\mathcal{M}}\cup\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}^\psi})\cap\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}{\mu_w(\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}\geqslant\beta$$

$$\text{iff} \quad \frac{\mu_w(\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{M}^\psi}\cap\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}{\mu_w(\llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{M}})}\geqslant\beta$$

$$\text{iff} \quad \mathcal{M},w\models\llbracket\psi\rrbracket P(\varphi)\geqslant\beta$$

□

比较命题 4.2 和命题 4.6 可知,两个等值式中唯一的区别在于 $CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta$ 和 $CP([\psi]\varphi|\psi)\geqslant\beta$ 之间。其中微妙的区别可以从以下两方面来理解。

从技术上看,条件概率作为一种信息更新的更

新机制,这个机制是无法处理高阶信息的。在动态化的概率命题逻辑中,由于不确定 φ 是不是概率公式,所以在

$$CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta\leftrightarrow[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta$$

中,将 $CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta$ 改写为 $CP([\psi]\varphi|\psi)\geqslant\beta$。如果 φ 不是概率公式,那么通过引理 3.1 可知 $CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta$ 和 $CP([\psi]\varphi|\psi)\geqslant\beta$ 是等价的;如果 φ 是概率公式,在计算概率公式的概率时,由于条件概率无法刻画高阶概率的更新,因此我们引入公开宣告算子,将“以 ψ 为条件 φ 的概率”修正为“以 ψ 为条件 $[\psi]\varphi$ 的概率”。

从直观上看,范丙申[2],第417页曾用一个生动的比喻描述二者的区别:条件概率所传达的信息类似于阅读旅行手册并想象热带岛屿,而公开宣告则是描述抵达度假目的地后的情形。条件概率公式 $CP(\varphi|\psi)\geqslant\beta$ 表示假设 ψ 被宣告后,φ 的概率大于或等于 β;而宣告公式 $[\psi]P(\varphi)\geqslant\beta$ 表示“宣告 ψ”发生后,φ 的概率大于或等于 β。条件概率公式描述的是主体在假设某个事件发生后的认知状态,而宣告公式则表达的是某个事件真实发生后的情况。二者之间有关联,但并不完全相同。

概率论中的条件概率通常只关注一阶信息(不含概率的嵌套),往往忽视了新信息“实际的”引入和“假设的”引入之间的区别。然而,同样是采用贝叶斯更新的方法,动态化概率命题逻辑能够准确的把握高阶信息的变化,在这一方面概率命题逻辑更有优势。

5 结论与后续工作

本文借鉴费金等人[9]和库伊[15]的工作,为概率命题逻辑提供了一个简化的概率模型并讨论其互模拟与框架可定义等相关问题。我们对 PPL 进行了动态化的扩充,利用若干归约公理证明扩充后的逻辑可以归约到 PPL 上。在 PPL! 中引入条件概率公式,并讨论条件概率公式与公开宣告之间的关系,指出条件概率算子与公开宣告算子在概率更新方面的区别。

在未来工作中,我们将继续如下三方面的研究。首先,在 PPL 中如果将概率算子看作一种模态算子,那么 PPL 中有无穷多个模态算子。为此,我们希望讨论一个更弱的概率逻辑,将概率模态词限制在只有 $P(\cdot)=1$ 的概率命题逻辑。因其对偶算子为 $P(\cdot)>0$,所以这个逻辑只能表达“等于 1”和“大于 0”这两种概率。更进一步,我们希望把这个逻辑与正规模态逻辑相对比。我们猜想这个新的概率命题逻辑是正规模态逻辑的一个扩张,因为 $P(\cdot)=1$ 在满足正规性的同时还至少满足持续性。此外,我们还猜想这个新的概率命题逻辑具有强完全性。

其次,在经典模态逻辑中从某个世界满足 $\Diamond\varphi$ 和 $\Diamond\psi$,我们无法看出 φ 和 ψ 谁的“可能性”更大。在后续工作中,我们将尝试在模态逻辑的模型中引入概率函数,把当前点的概率函数定义在当前点的后继集上。基于这样的模型,我们就可以讨论可能性的大小,建立一个以概率为基础的偏好逻辑。

最后,我们尝试在概率模型中讨论认知算子。在经典的概率认知逻辑中,概率公式的真假由概率函数决定,认知公式的真假由可及关系决定,二者之间缺少互动。这不符合我们直观。近年来,在概率认知逻辑的领域中,已经有一些文献[13,17]讨论概率与认知的关系,特别是概率与信念的关系。在后续工作中,我们希望在一个没有可及关系,只有概率函数的模型中定义包括信念和知识在内的认知算子,并讨论它们之间的关系。

注释:

①F 是死点框架,当且仅当,对于任意的 $w\in W$ 和对于任意的 $X\subseteq W$,$\mu_w(X)=0$。

②当 $\varphi\in L_{PPL}$ 时,$M,w\models\varphi$ 的语义定义与定义 2.5 相同。

③一元概率公式是通过线性不等式来定义的,这样就保证了 $P(\varphi\wedge\psi)\geqslant\beta P(\psi)$ 是一个合式公式。

参考文献:

[1]A. Baltag and S. Smets, 2008, "Probabilistic dynamic belief revision", Synthese, 165: 179-202.

[2]J. van Benthem, 2003, "Conditional probability meets update logic", Journal of Logic Language & Information, 12(4): 409-421.

[3] J. van Benthem, J. Gerbrandy and B. Kooi, 2009, "Dynamic update with probabilities", Studia Logica, 93: 67 – 96.

[4] P. Blackburn., M. de Rijke and Y. Venema, 2002, Modal Logic, Amsterdam: Cambridge University Press.

[5] L. Demey and J. Sack, 2015, "Epistemic probabilistic logic", in H. van Ditmarsch, J. Y. Halpern, W. van der Hoek and B. Kooiand (eds.), Handbook of Epistemic Logic, pp. 147 – 202, London: College Publications.

[6] H. van Ditmarsch, W. van Der Hoek and B. Kooi, 2007, Dynamic Epistemic Logic, Vol. 337, Springer Science & Business Media.

[7] H. van Ditmarsch, W. van der Hoek, J. Y. Halpern and B. Kooi, 2015, Handbook of Epistemic Logic, London: College Publications.

[8] R. Fagin and J. Y. Halpern, 1994, "Reasoning about knowledge and probability", Journal of the ACM, 41: 340 – 367.

[9] R. Fagin, J. Y. Halpern and N. Megiddo, 1990, "A logic for reasoning about probabilities", Journal of the ACM, 87: 78 – 128.

[10] C. van Fraassen, 1984, "Belief and the will", The Journal of Philosophy, 81(5): 235 – 256.

[11] J. Y. Halpern, 2010, "Lexicographic probability, conditional probability, and nonstandard probability", Games and Economic Behavior, 68(1): 155 – 179.

[12] J. Y. Halpern, 2017, Reasoning about Uncertainty, MA: MIT press.

[13] J. He and H. Liu, 2021, "A probabilistic semantics for belief logic", Notre Dame Journal of Formal Logic, 62(4): 643 – 659.

[14] A. Kolmogoroff, 1933, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin: Springer.

[15] B. P. Kooi, 2003, "Probabilistic dynamic epistemic logic", Journal of Logic, Language and Information, 12: 381 – 408.

[16] D. Miller, 1966, "A paradox of information", The British Journal for the Philosophy of Science, 17(1): 59 – 61.

[17] Y. Pan and M. Guo, 2024, "Probabilistic epistemic logic based on neighborhood semantics", Synthese, 203(5): 135.

[18] J. Plaza, 1989, "Logics of public announcements", Proceedings 4th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems, pp. 201 – 216.

[19] M. Rašković, Z. Marković and Z. Ognjanović, 2008, "A logic with approximate conditional probabilities that can model default reasoning", International Journal of Approximate Reasoning, 49(1): 52 – 66.

[20] A. Rényi, 1955, "On a new axiomatic theory of probability", Acta Mathematica Hungarica, 6(3 – 4): 285 – 335.

[21] Y. Wang and Q Cao, 2013, "On axiomatizations of public announcementlogic", Synthese, 190: 103 – 134.

Probabilistic Propositional Logic and Its Dynamic

Pan Yixin **Guo Meiyun**

Abstract: Probabilistic logic is an essential tool in quantified research and uncertain reasoning. Dynamization and conditionalization are two important ways to characterize probability updates. This paper introduces a probabilistic propositional logic (PPL) based on a simplified probabilistic model, investigating its properties such as bisimulation and definability of frame. Dynamic probabilistic propostional logic (PPL!) incorporates an update operator into PPL which is proved reducible to PPL. Finally, based on PPL! with conditional probability formula, this paper explores the distinction between public annoucement and conditional probability in probablistic updating.